Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1982

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgave til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1

Funktionerne f og g er definerede på intervallet $[-\pi,\pi]$. De er givet ved

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right), \quad g(t) = \sin(2t),$$

hvor $t \in [-\pi,\pi]$.

For hver af funktionerne skal man med anførelse af de nødvendige udregninger bestemme den tilhørende Fourierrække og desuden undersøge, hvad man får ud af at anvende Parseval's ligning.

Opgave nr. 2

I denne opgave betegner ℓ^2 Hilbertrummet af dobbelt-uendelige følger $x = (\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots)$ med $\|x\|^2 < \infty$, hvor $\|x\|^2 = \Sigma_{-\infty}^{\infty}|x_n|^2$. For hvert $n = \cdots,-1,0,1,\cdots$ betegner φ_n den n'te basisvektor i den kanoniske basis for ℓ^2.

En operator T på ℓ^2 er givet ved ligningerne

$$T\varphi_n = \varphi_n + \varphi_{-n} \; ; \; n = \cdots,-1,0,1,\cdots .$$

Undersøg, om T er selvadjungeret eller unitær.

(Opgaven fortsættes)

Find punktspektret for T.

Vis, at ethvert komplekst tal λ, som ikke ligger i punktspektret, er et regulært punkt for T.

Udtryk for $\lambda \notin \sigma(T)$ operatoren $(T-\lambda I)^{-1}$ på simpel vis ved hjælp af operatoren T selv og identiteten I.

Opgave nr. 3

En to-trins raket virker på en sådan måde, at anden raket tændes, så snart brændstoffet til første raket er sluppet op. Begge raketter bruger samme slags brændstof. I alt kan der medføres en brændstofmængde på 1 (målt i en passende vægtenhed). Denne brændstofmængde ønskes fordelt på den mest hensigtsmæssige måde, således at den samlede vejlængde, raketten tilbagelægger, bliver så stor som muligt. Brændstofmængden til første raket betegnes a og brændstofmængden til anden raket betegnes b. Så er $a+b = 1$ og $0 < a < 1$.

Om raketsystemet oplyses følgende:

Den vejlængde (målt i en passende enhed), som tilbagelægges mens 1'te raket er tændt, er normalfordelt med middelværdi a og spredning $\frac{1}{6}a$. Såfremt denne vejlængde er x, vil den vejlængde, som tilbagelægges, mens anden raket er tændt, være normalfordelt med middelværdi $2xb$ og spredning $\frac{1}{6}b$.

Bestem a og b, så at middelværdien af den samlede vejlængde bliver maksimal.

Lad X og Y være vejlængderne, som tilbagelægges mens hhv. 1'te og 2'den raket er tændt. Sæt $W = Y - 2Xb$, hvor b har den ovenfor bestemte værdi.

(Opgaven fortsættes)

Bestem for enhver positiv værdi af x den betingede fordeling af W, givet $X = x$.

Bevis, at den samlede vejlængde er normalfordelt og bestem parametrene i denne fordeling.

Opgave nr. 4

En stikprøve af størrelse n udtages fra en diskret fordeling med støtte (definitionsmængde) i $\{0,1,2,3,\cdots\}$.

Med H_0 betegnes den hypotese, at stikprøven er fra Poisson-fordelingen med parameter 1 og med H_1 betegnes den hypotese, at stikprøven er fra den fordeling, der er givet ved, at værdien i $\{k\}$ er

$$\frac{c}{(k+1)!} \; ; \; k = 0,1,2,\cdots ,$$

hvor c er en konstant $(c = 0.58\cdots)$.

Betragt de to tests med forkastelsesområder givet ved

$$C_n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\}$$

$$C'_n = C_n \cup \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid \text{der findes et } i \text{, så at } x_i = 1 \text{, og så at } x_j = 0 \text{ for } j \neq i\} .$$

Bevis, at begge tests er bedste tests af H_0 mod H_1.

Vis, at for begge tests findes der et n, så at niveauet bliver under 50% og styrken over 50%.