

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1981

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpe midler er tilladt.

Opgave nr. 1

Funktionen f givet ved

$$f(x) = (\pi \cdot |x| - x^2)^2 ; \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

har Fourierrækken

$$\frac{\pi^4}{30} - \sum_1^{\infty} \frac{3}{n^4} \cos 2nx.$$

Dette kræves ikke bevist.

Udnyt dette resultat til at beregne summen

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

og til at bevise, at

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Opgave nr. 2

En funktion defineret på $[0, \infty[$ har den Laplacetransformerede

$$\frac{4z^2 - 1}{z^3 - z}.$$

Bestem funktionen.

Opgave nr. 3

Med ℓ^2 betegnes Hilbertrummet af komplekse følger

$$x = (x_1, x_2, \dots) \text{ med } \|x\|^2 = \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty.$$

Med T betegnes operatoren på ℓ^2 defineret ved

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \dots) .$$

Find punktspektret for T .

Afgør, hvilke af punkterne $0, 1$ og -1 , der tilhører spektret for T .

Opgave nr. 4

I permutationsgruppen S_9 betragtes følgende 3 permutationer

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 3 & 6 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} ,$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} ,$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Bestem ordnerne af x, y og z .

Vis, at to af de tre permutationer er konjugerede, og bestem en indre automorfi, der fører den ene af disse permutationer over i den anden.

Opgave nr. 5

En gruppe G har konjugeretklasserne $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ og K_7 .
Af karaktertabellen kendes de i tabellen opgivne tal.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
χ_1	1						
χ_2	1	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1		1	-1	1	1	
χ_4	1	-1	1	-1	1		1
χ_5	2	$\sqrt{2}$	0		-2	0	0
χ_6	2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	-2	0	
χ_7		0	-2		2	0	0

Bestem de manglende tal i tabellen. De principper, der anvendes, skal klart fremgå af besvarelsen.

Find ordenen af G samt antallet af elementer i konjugeretklasserne.