

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpe midler er tilladt. (Også lommeregner).

Opgave 1

Find ved udnyttelse af Laplacetransformationen en løsning til differentialligningen

$$f'''(t) - f'(t) + 2 \cos t = 0 \quad ; \quad t \geq 0$$

som tilfredsstiller betingelserne

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0.$$

Opgave 2

I \mathbb{C}^2 betragtes vektorerne

$$e_1 = (1, 0) \quad , \quad e_2 = (-1, 1).$$

Med T betegnes den operator på \mathbb{C}^2 , der med hensyn til basen e_1, e_2 repræsenteres ved matricen

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Bestem konstanterne α og β således, at operatoren S , som er givet ved

$$S(e_1) = e_1 + \alpha e_2 \quad ,$$

$$S(e_2) = \beta e_1 + 2e_2 \quad ,$$

kommuterer med T .

Find $\sigma(T)$ og $\sigma(S)$.

Er T og S selvadjungerede?

Er T og S normale?

Opgave 3

Find Fourierrækken for den funktion f som fastlægges ved

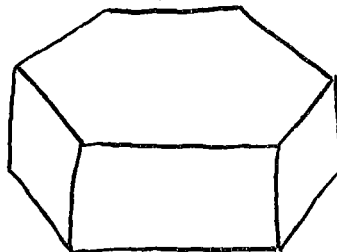
$$f(t) = e^t; \quad -\pi < t \leq \pi.$$

Beregn summen af rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Opgave 4

Et polyeder er begrænset af to regulære sekskanter (en "øvre" sekskant og en "nedre" sekskant) samt af 6 rektangler, jvf. figuren.



Hvilken aksial punktgruppe udgør polyedrets fuldstændige symmetrigruppe G ? Angiv, uden bevis, inddelingen af gruppen i konjugeretklasse.

Det antages nu, at hveranden af de 6 kanter i den øvre sekskant og ligeledes hveranden af de 6 kanter i den nedre sekskant, er en "dobbelbinding". Angiv for begge de principielt forskellige muligheder for placering af dobbeltbindingerne, hvilken aksial punktgruppe, der bestemmes af den undergruppe af G som består af alle de isometrier ved hvilke en dobbeltbinding føres over i en dobbeltbinding. Undersøg, om de to fundne grupper er isomorfe. Hvilken aksial punktgruppe dannes af fællesmængden af de to undergrupper?

Opgave 5

En gruppe af orden 24 har 5 konjugeretklasser K_1, K_2, K_3, K_4 og K_5 .

Man kender 4 karakterer χ_1, χ_2, χ_3 og χ' for gruppen; de er givet i følgende tabel

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	3	-1	0	1	-1
χ'	5	1	-1	-1	1

Desuden vides, at følgende ligninger gælder:

$$\|\chi_3\|^2 = 1,$$

$$\langle \chi', \chi_1 \rangle = \langle \chi', \chi_2 \rangle = \langle \chi', \chi_3 \rangle = 0.$$

Find på basis af disse oplysninger karaktertabellen for gruppen.

Bestem antallet af elementer i de enkelte konjugeretklasser.