Københavns Universitet
Matematisk Institut

Naturvidenskabelig embedseksamen
Sommeren 1981

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgave til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1

Funktionen f givet ved

$$f(x) = (\pi \cdot |x| - x^2)^2 \quad ; \qquad -\pi \le x \le \pi$$

har Fourierrækken

$$\frac{\pi^4}{30} - \sum_1^\infty \frac{3}{n^4} \cos 2nx \,.$$

Dette kræves ikke bevist.

Udnyt dette resultat til at beregne summen

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^4}$$

og til at bevise, at

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450} \,.$$

Opgave nr. 2

En funktion defineret på $[0,\infty[$ har den Laplacetransformerede

$$\frac{4\,z^2 - 1}{z^3 - z} \,.$$

Bestem funktionen.

Opgavesættet fortsættes

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1981
Matematik B, fysik-geofysik.

Opgave nr. 3

Med ℓ^2 betegnes Hilbertrummet af komplekse følger $x = (x_1, x_2, \ldots)$ med $\|x\|^2 = \Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty$.

Med T betegnes operatoren på ℓ^2 defineret ved

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \ldots) .$$

Find punktspektret for T.

Afgør, hvilke af punkterne $0, 1$ og -1, der tilhører spektret for T.

Bemærk. Eksaminanden kan vælge mellem nedenstående opgaver nr. 4A og 4B.

Opgave nr. 4A

En kortbunke består af 52 kort. Af disse anses de 20 for gunstige (nemlig alle esser, billedkort og tiere).

Der udtages to kort efter følgende regler.

Først trækkes to kort tilfældigt fra bunken. Bunken indeholder herefter 50 kort.

Er begge de først udtrukne kort ugunstige, byttes de med to tilfældigt udtrukne kort fra bunken (der altså indeholder 50 kort ved denne udtrækning).

(Opgaven fortsættes)

(opgave 4A fortsat)

Er ét af de først udtrukne kort ugunstigt, byttes det med et tilfældigt udtrukket kort fra bunken.

Er begge de først udtrukne kort gunstige, beholdes disse.

Beregn sandsynlighederne for følgende 6 hændelser:

Begge først udtrukne kort er ugunstige.

Af de først udtrukne kort er ét gunstigt og ét ugunstigt.

Begge først udtrukne kort er gunstige.

Begge slutkort (d.v.s. de to kort, man har i hånden efter en eventuel ombytning) er ugunstige.

Det ene slutkort er gunstigt, det andet ugunstigt.

Begge slutkort er gunstige.

Opgave nr. 4B

Et radioaktivt præparat studeres. Levetiden for hvert enkelt atom, d.v.s. ventetiden til atomet undergår en kerneomdannelse, antages at være eksponentialfordelt med parameter λ.

Halveringstiden $T_{\frac{1}{2}}$ defineres ved, at sandsynligheden for, at et atom omdannes inden tid $T_{\frac{1}{2}}$, er lig med sandsynligheden for, at atomet omdannes efter tid $T_{\frac{1}{2}}$.

(i) Bevis, at

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} .$$

(Opgaven fortsættes)

(opgave 4B fortsat)

Det antages i resten af opgaven, at præparatet består af $2N$ atomer, hvor N er et stort tal (af størrelsesordenen Avogadros tal, altså ca. 10^{23}). Med $X_1, X_2, \cdots, X_{2N}$ betegnes levetiderne for de enkelte atomer. Det antages, at disse stokastiske variable er uafhængige og, som allerede nævnt, at de er eksponentialfordelte med parameter λ.

Definer tidspunkterne for radioaktive omdannelser $t_1, t_2, \cdots, t_{2N-1}, t_{2N}$ som de stokastiske variable

t_1 = mindste af $X_1, X_2, \cdots, X_{2N}$,
t_2 = næstmindste af $X_1, X_2, \cdots, X_{2N}$,
$\vdots$
t_{2N-1} = næststørste af $X_1, X_2, \cdots, X_{2N}$,
t_{2N} = største af $X_1, X_2, \cdots, X_{2N}$.

(ii) Bevis, at t_1 er eksponentialfordelt med parameter $2N \cdot \lambda$.

(iii) Definer ventetiderne $v_1, v_2, \cdots, v_{2N}$ ved

$$v_1 = t_1, \; v_2 = t_2 - t_1, \cdots, v_{2N} = t_{2N} - t_{2N-1}$$

og vis, at ventetiderne er uafhængige og at v_k er eksponentialfordelt med parameter $(2N - k + 1) \cdot \lambda$; $k = 1, 2, \cdots, 2N$.

Vejledning. Man kan f.eks. udnytte, at den simultane tæthedsfunktion for $t_1, t_2, \cdots, t_{2N}$ er givet ved

$$g(t_1, t_2, \cdots, t_{2N}) = (2N)! \, \lambda^{2N} e^{-\lambda(t_1 + t_2 + \cdots + t_{2N})} ; \; 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2N}$$

(denne formel kræves ikke bevist).

(Opgaven fortsættes)

(opgave 4B fortsat)

(iv) Den stokastiske halveringstid defineres som t_N.

Bevis, at

$$E(t_N) = \lambda^{-1}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}\right)$$

og

$$\sigma^2(t_N) = \lambda^{-2}\left(\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2N)^2}\right).$$

(v) Idet summerne, der optræder i (iv), opfattes som middelsummer for visse integraler, skal man udregne omtrentlige værdier for $E(t_N)$ og $\sigma^2(t_N)$.

Opgave nr. 5

Der udtages en stikprøve af størrelse 1 fra en fordeling. Med H_0 betegnes hypotesen, at stikprøven er fra en normeret normalfordeling, og med H_1 betegnes hypotesen, at stikprøven er fra en eksponentialfordeling med parameter 1.

Eftervis, at såvel testet med forkastelsesområde

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

som testet med forkastelsesområde

$$C_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} \text{ eller } x \geq \tfrac{3}{2}\}$$

er bedste tests af nulhypotesen H_0 mod den alternative hypotese H_1.

Beregn niveau og styrke for begge tests (bemærk, at dette spørgsmål kan besvares uafhængigt af det første spørgsmål).