Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1979/80.

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt. (Også lommeregnere).

Opgave 1

Beregn foldningen

$$(\delta - \delta'')*(\delta - \delta'')*f*g \ ,$$

hvor f og g er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & ; \ t \geq 0 \\ 0 & ; \ t < 0 \end{cases} \quad , \quad g(t) = f(-t).$$

Opgave 2

Betragt Hilbertrummet $L^2([-2,2];\rho)$, hvor vægtfunktionen ρ er givet ved

$$\rho(t) = \begin{cases} 2 & ; \ -2 \leq t \leq -1 \\ 1 & ; \ -1 < t < 1 \\ 2 & ; \ 1 \leq t \leq 2 \ . \end{cases}$$

Find, såvel for $n+m$ lige som for $n+m$ ulige, et udtryk for det indre produkt $\langle t^n, t^m \rangle$; $n \geq 0$, $m \geq 0$.

Bestem polynomier φ_0, φ_1 og φ_2 af hhv. 0'te, 1'te og 2'den grad, så at de udgør et ortonormalsystem.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3

Find ved hjælp af Stirlings formel en approksimation til binomialkoefficienten $\binom{2n}{n}$. Anvend den fundne approksimation til tilnærmet beregning af $\binom{20}{10}$ (tilnærmelsen kræves ikke at være særlig god; det er nok at bestemme k, så at $10^k < \binom{20}{10} < 10^{k+1}$).

Opgave 4

I denne opgave betragtes polyederet med 4 hjørner P_1, P_2, P_3 og P_4, som i den naturlige basis for R^3 har koordinaterne

$$P_1 : (a,-1,0) \quad , \quad P_2 : (-a,-1,0),$$
$$P_3 : (0,1,a) \quad , \quad P_4 : (0,1,-a) \quad ,$$

hvor a er et positivt tal.

Lad N være midtpunktet af liniestykket P_1P_3 og lad M være midtpunktet at liniestykket P_2P_4. Undersøg, for hvilke værdier af parameteren a vektoren $\overrightarrow{NM}$ er vinkelret på vektoren $\overrightarrow{P_1P_3}$.

Find dernæst for enhver værdi af parameteren a den egentlige symmetrigruppe for polyederet $P_1P_2P_3P_4$. Der lægges vægt på en udførlig begrundelse for, at de anførte isometrier og ikke andre er med i gruppen.

Opgave 5

Permutationsgruppen S_6 har 11 konjugeretklasser. Hver af disse er af type $1^{p_1}2^{p_2}3^{p_3}4^{p_4}5^{p_5}6^{p_6}$ for et passende valg af $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, jvf. nedenstående skema:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}
p_1	6	4	2	0	3	1	0	2	0	1	0
p_2	0	1	2	3	0	1	0	0	1	0	0
p_3	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0
p_4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
p_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
p_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Angiv antallet m_i af elementer i K_i for $i = 1,2,\ldots,11$ (det anbefales at kontrollere, at $m_1+m_2+\ldots+m_{11} = 720$).

Udtryk den alternerende gruppe A_6 ved hjælp af konjugeretklasserne.

Find to lineære karakterer for S_6.

Find endnu en irreducibel karakter for S_6 ved som udgangspunkt at se på den specielle 6-dimensionale repræsentation af S_6, der i noterne benævnes D_6, jvf. noterne side VIII. 2.10.