Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1979/80.

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt. (Også lommeregnere).

Opgave 1

Beregn foldningen

$$(\delta - \delta'')*(\delta - \delta'')*f*g \ ,$$

hvor f og g er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & ; \ t \geq 0 \\ 0 & ; \ t < 0 \end{cases} \qquad , \quad g(t) = f(-t) .$$

Opgave 2

Betragt Hilbertrummet $L^2([-2,2];\rho)$, hvor vægtfunktionen ρ er givet ved

$$\rho(t) = \begin{cases} 2 & ; \ -2 \leq t \leq -1 \\ 1 & ; \ -1 < t < 1 \\ 2 & ; \ \ 1 \leq t \leq 2 \ . \end{cases}$$

Find, såvel for $n+m$ lige som for $n+m$ ulige, et udtryk for det indre produkt $\langle t^n, t^m \rangle$; $n \geq 0$, $m \geq 0$.

Bestem polynomier φ_0, φ_1 og φ_2 af hhv. 0'te, 1'te og 2'den grad, så at de udgør et ortonormalsystem.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3

Find ved hjælp af Stirlings formel en approksimation til binomialkoefficienten $\binom{2n}{n}$. Anvend den fundne approksimation til tilnærmet beregning af $\binom{20}{10}$ (tilnærmelsen kræves ikke at være særlig god; det er nok at bestemme k, så at $10^k < \binom{20}{10} < 10^{k+1}$).

Opgave 4

Det stokastiske variable S_1 er binomialfordelt med parametrene $(n,p) = (500,\ 6\ ^o/oo)$, og den stokastiske variable S_2 er binomialfordelt med parametrene $(n,p) = (500,\ 4\ ^o/oo)$.

Sammenlign følgende par af sandsynligheder, og afgør i hvert af de 3 tilfælde, hvilken sandsynlighed der er størst:

$$P(S_1 = 0) \quad , \quad P(S_2 = 0) \ ;$$

$$P(S_1 = 3) \quad , \quad P(S_2 = 3) \ ;$$

$$P(S_1 \le 3) \quad , \quad P(S_2 \le 3) \ .$$

Opgave 5

For $0 \le \theta \le 1$ betegner $f(x|\theta)$ tæthedsfunktionen givet ved

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-\theta} & ; \quad 0 \le x \le \theta \\[2ex] \dfrac{2}{2-\theta} & ; \quad \theta < x \le 1 \ . \end{cases}$$

(Opgaven fortsættes)

(opgave 5 fortsat)

Der er givet stikprøven $(x_1, x_2) = (1/3, 1/2)$ fra familien $f(x|\theta)$; $0 < \theta < 1$. Find maksimum-likelihood estimatoren for θ.

Vi har nu stikprøver af størrelse 1 i tankerne. Bevis, at testet med forkastelsesområde

$$C = \{x \mid \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$

definerer et bedste test af hypotesen $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ mod hypotesen $H_1 : \theta = \frac{1}{3}$. Bestem niveau og styrke for dette test.