Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1979

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt. (Også lommeregnere).

Den mundtlige eksamen begynder onsdag d. 6. juni kl. 9.00 præcis. Der vil blive eksamineret 10 eksaminander om onsdagen, resten om torsdagen d. 7. juni. Meddelelse om eksaminationsdagen kan fås ved henvendelse til Matematisk Institut, tlf. (01) 35 31 33 fra mandag d. 28. maj; der vil blive taget hensyn til eventuelle særønsker.

Opgave 1

Med ρ betegnes funktionen defineret ved

$$\rho(t) = t; \quad t \in [0,1].$$

For reelle konstanter α, β og γ betragtes funktionerne φ_0 og φ_1 definerede ved

$$\varphi_0(t) = \alpha, \quad \varphi_1(t) = \beta + \gamma t ; \qquad t \in [0,1].$$

Bestem α, β og γ, så at φ_0 og φ_1 i Hilbertrummet $L^2([0,1];\rho)$ er normerede vektorer, som står vinkelret på hinanden.

Bestem dernæst det 1'te grads polynomium, der i $L^2([0,1];\rho)$ bedst approksimerer funktionen f defineret ved

$$f(t) = t^3 ; \quad t \in [0,1].$$

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1979
Matematik B, Kemi-opgivelser

Opgave 2

Med ℓ^2 betegnes Hilbertrummet af komplekse følger $x = (x_1, x_2, \ldots)$ med $\|x\|^2 = \Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty$.

Med T betegnes operatoren på ℓ^2 defineret ved

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (-x_2, x_3, -x_4, \ldots)\ ,$$

hvor altså den n'te koordinat i Tx er lig med $(-1)^n x_{n+1}$ for ethvert naturligt tal n.

Find spektret for T.

Opgave 3

Bestem en funktion f defineret for $-\infty < t < \infty$ således, at

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega) + \sqrt{2\pi} \cdot i\omega \cdot e^{-(\frac{\omega^2}{2} + i\omega)} .$$

Opgave 4

Find to ikke-isomorfe abstrakte grupper således, at der for hver af dem findes mindst tre forskellige, med gruppen isomorfe punktgrupper. Elementerne i alle de involverede punktgrupper skal anføres eksplicit.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 5

I nedenstående tabel er opgivet en 2-dimensional repræsentation D' af permutationsgruppen S_3 samt to af matricerne hørende til en vis 3-dimensional repræsentation D" af S_3.

S_3	E	(123)	(132)	(23)	(12)	(13)
D'	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix}$
D"		$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$		

Bestem de 4 manglende matricer hørende til D".

Vis, at D" er ækvivalent med den direkte sum af D' og en vis 1-dimensional repræsentation, og find denne.