Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1979

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt. (Også lommeregnere).

Den mundtlige eksamen begynder onsdag d. 6. juni kl. 9.00 præcis. Der vil blive eksamineret 10 eksaminander om onsdagen, resten om torsdagen d. 7. juni. Meddelelse om eksaminationsdagen kan fås ved henvendelse til Matematisk Institut, tlf. (01) 35 31 33 fra mandag d. 28. maj; der vil blive taget hensyn til eventuelle særønsker.

Opgave 1

Med ρ betegnes funktionen defineret ved

$$\rho(t) = t; \qquad t \in [0,1].$$

For reelle konstanter α, β og γ betragtes funktionerne φ_0 og φ_1 definerede ved

$$\varphi_0(t) = \alpha, \quad \varphi_1(t) = \beta + \gamma t; \qquad t \in [0,1].$$

Bestem α, β og γ, så at φ_0 og φ_1 i Hilbertrummet $L^2([0,1];\rho)$ er normerede vektorer, som står vinkelret på hinanden.

Bestem dernæst den 1'te grads polynomium, der i $L^2([0,1];\rho)$ bedst approksimerer funktionen f defineret ved

$$f(t) = t^3; \qquad t \in [0,1].$$

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1979
Matematik B, fysik-geofysik-opgivelser

Opgave 2

Med ℓ^2 betegnes Hilbertrummet af komplekse følger $x = (x_1, x_2, \ldots)$ med $\|x\|^2 = \Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty$.

Med T betegnes operatoren på ℓ^2 defineret ved

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (-x_2, x_3, -x_4, \ldots) ,$$

hvor altså den n'te koordinat i Tx er lig med $(-1)^n x_{n+1}$ for ethvert naturligt tal n.

Find spektret for T.

Opgave 3

Bestem en funktion f defineret for $-\infty < t < \infty$ således, at

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega) + \sqrt{2\pi} \cdot i\omega \cdot e^{-(\frac{\omega^2}{2} + i\omega)} .$$

Opgave 4

I denne opgave kan man have gavn af formlen $\Sigma_1^\infty n x^n = x(1-x)^{-2}$; $|x| < 1$.

Et én-mands spil spilles på den måde, at der udføres en række kast med en terning efter følgende regler: Kastene skal være uafhængige af hinanden. Efter hvert kast noteres pointtallet, hvorved forstås summen af antallene af øjne opnået i det netop udførte og alle de foregående kast. Man bliver ved med at kaste,

(Opgaven fortsættes)

(opgave 4 fortsat)

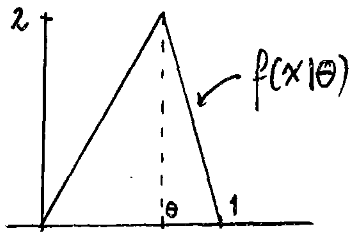
indtil der opnås et lige pointtal. Spillerens gevinst er da pointtallet efter det sidst udførte kast.

Find sandsynligheden for, at spillet varer netop n kast; $n = 1,2,\ldots,$ og find spillets middelvarighed.

Find middelværdien af spillerens gevinst.

Opgave 5

For $0 < \theta < 1$ betegner $f(x|\theta)$ den tæthedsfunktion, som geografisk er givet på nedenstående figur.



Der er givet stikprøven $(x_1, x_2) = (1/3, 1/2)$ fra familien $f(x|\theta)$; $0 < \theta < 1$. Find maksimum-likelihood estimatoren for θ.

Vi har nu stikprøver af størrelse 1 i tankerne. Bevis, at testet med forkastelsesområde

$$C = \{x \mid 0.4 \leq x \leq 1\}$$

definerer et bedste test af hypotesen $H_0 : \theta = 1/3$ mod hypotesen $H_1 : \theta = 1/2$.