Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1978-79

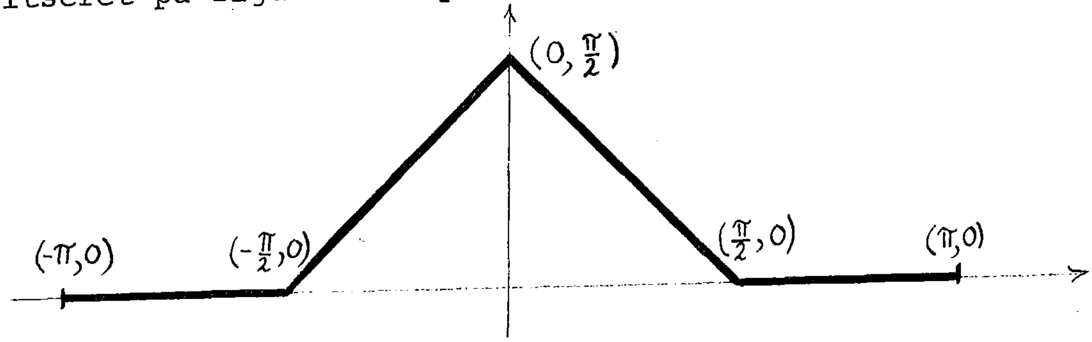
MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Find Fourierrækken på reel form for den funktion, som er skitseret på figuren. Udnyt dette til at



beregne summen af rækken

$$\Sigma_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$$

(det anbefales at kontrollere, om resultatet ser rimeligt ud).

Opgave 2.

I denne opgave betegner ℓ^2 Hilbertrummet af de vektorer $x = (x_1, x_2, \ldots)$, for hvilke $\Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty$, forsynet med det sædvanlige indre produkt.

(Opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

Lad T betegne operatoren på ℓ^2 givet ved $T\varphi_n = \varphi_{2n}$; $n \geq 1$, hvor φ_n betegner den n'te enhedsvektor.

(a) Bevis, at T er en begrænset operator og bestem dens norm.

(b) Undersøg, om T har egenværdier.

(c) Find spektret for T (man kan f.eks. studere operatorligningen $Tx-\lambda x = \varphi_1$).

(d) Løs operatorligningen

$$Tx - 2x = \varphi_1 - \tfrac{1}{2}\varphi_2 \; , \qquad x \in \ell^2$$

(man kan f.eks. først finde et generelt udtryk for operatoren $(T-2I)^{-1}$, evt. ved at betragte Neumannrækken hørende til operatoren $\tfrac{1}{2}T$; det anbefales at kontrollere, at den fundne vektor x virkelig løser den anførte ligning.

(e) Bestem operatoren T^* ved for enhver værdi af n at angive $T^*\varphi_n$. Undersøg, om T er normal.

<u>Bemærkning</u>. Spørgsmålene er stort set uafhængige af hinanden. Specielt bemærkes, at (d) kan besvares uden kendskab til (c), og at (e) ikke kræver kendskab til nogen af de øvrige spørgsmål.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3.

Gruppen $G = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ har følgende kompositionstabel

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	3	1	5	6	4	8	9	7	11	12	10
3	3	1	2	6	4	5	9	7	8	12	10	11
4	4	6	5	1	3	2	10	12	11	7	9	8
5	5	4	6	2	1	3	11	10	12	8	7	9
6	6	5	4	3	2	1	12	11	10	9	8	7
7	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
8	8	9	7	11	12	10	2	3	1	5	6	4
9	9	7	8	12	10	11	3	1	2	6	4	5
10	10	12	11	7	9	8	4	6	5	1	3	2
11	11	10	12	8	7	9	5	4	6	2	1	3
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Nedenstående punkter ønskes diskuteret direkte på basis af kompositionstabellen:

(a) Bestem elementernes orden, gruppens centrum samt opdelingen i konjugeretklasser.

(b) Find samtlige ikke-trivielle invariante undergrupper, som indeholder gruppeelementet 3. Undersøg, hvilke blandt disse der er cykliske, og vis, at de resterende er indbyrdes isomorfe.

(c) Er G isomorf med $D_3 \times C_2$? Angiv en konkret rumlig konfiguration, hvis fuldstændige isomotrigruppe er isomorf med G.

(d) Bestem gruppens karaktertabel. De principper, der anvendes, skal klart fremgå af besvarelsen, og kendskab til konkrete gruppers karaktertabeller må ikke udnyttes.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1978-79
Matematik B, kemi-opgivelser

Opgave 4.

Idet x betegner en af halvdrejningerne i tetraedergruppen T og y betegner en af 3-tals drejningerne, vides det om en repræsentation D af T, at

$$\underline{\underline{D}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \text{spor } \underline{\underline{D}}(y) = \text{spor } \underline{\underline{D}}(y^{-1}).$$

Bestem irreducible repræsentationer således, at D er ækvivalent med den direkte sum af disse.