Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1978-79.

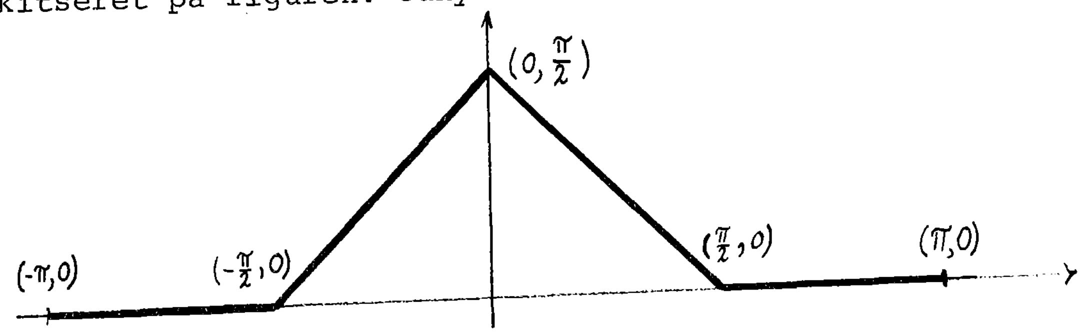
MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Find Fourierrækken på reel form for den funktion, som er skitseret på figuren. Udnyt dette til at



beregne summen af rækken

$$\Sigma_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$$

(det anbefales at kontrollere, om resultatet ser rimeligt ud).

Opgave 2.

I denne opgave betegner ℓ^2 Hilbertrummet af de vektorer $x = (x_1, x_2, \ldots)$, for hvilke $\Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty$, forsynet med det sædvanlige indre produkt.

(Opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

Lad T betegne operatoren på ℓ^2 givet ved $T\varphi_n = \varphi_{2n}$; $n \geq 1$, hvor φ_n betegner den n'te enhedsvektor.

(a) Bevis, at T er en begrænset operator og bestem dens norm.

(b) Undersøg, om T har egenværdier.

(d) Find spektret for T (man kan f.eks. studere operatorligningen $Tx-\lambda x = \varphi_1$).

(d) Løs operatorligningen

$$Tx - 2x = \varphi_1 - \tfrac{1}{2}\varphi_2 \,, \qquad x \in \ell^2$$

(man kan f.eks. først finde et generelt udtryk for operatoren $(T-2I)^{-1}$, evt. ved at betragte Neumannrækken hørende til operatoren $\tfrac{1}{2}T$; det anbefales at kontrollere, at den fundne vektor x virkelig løser den anførte ligning.

(e) Bestem operatoren T^* ved for enhver værdi af n at angive $T^*\varphi_n$. Undersøg, om T er normal.

<u>Bemærkning</u>. Spørgsmålene er stort set uafhængige af hinanden. Specielt bemærkes, at (d) kan besvares uden kendskab til (c), og at (e) ikke kræver kendskab til nogen af de øvrige spørgsmål.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3.

Et stokastisk eksperiment udføres som følger. Først trækkes et kort fra et komplet sæt kort (52 kort). Er det trukne kort et almindeligt kort (dvs. ikke et af de 12 billedkort) kastes en terning; er det trukne kort et billedkort, kastes to terninger. Den stokastiske variable X fastlægges som antallet af øjne på den kastede terning i første tilfælde, og som summen af antallene af øjne på de to kastede terninger i andet tilfælde.

Find middelværdien af X.

Beregn for enhver værdi af $x = 1,2,\ldots,12$ sandsynligheden for, at det trukne kort er et billedkort, når det vides, at $X = x$.

Opgave 4.

Der er forelagt en fordelingsfunktion G (se figuren s. 4) og de to ordnede stikprøver

I	0,6	1,3	1,5	2,5	3,6	5,6	6,2	6,7	7,7	9,0

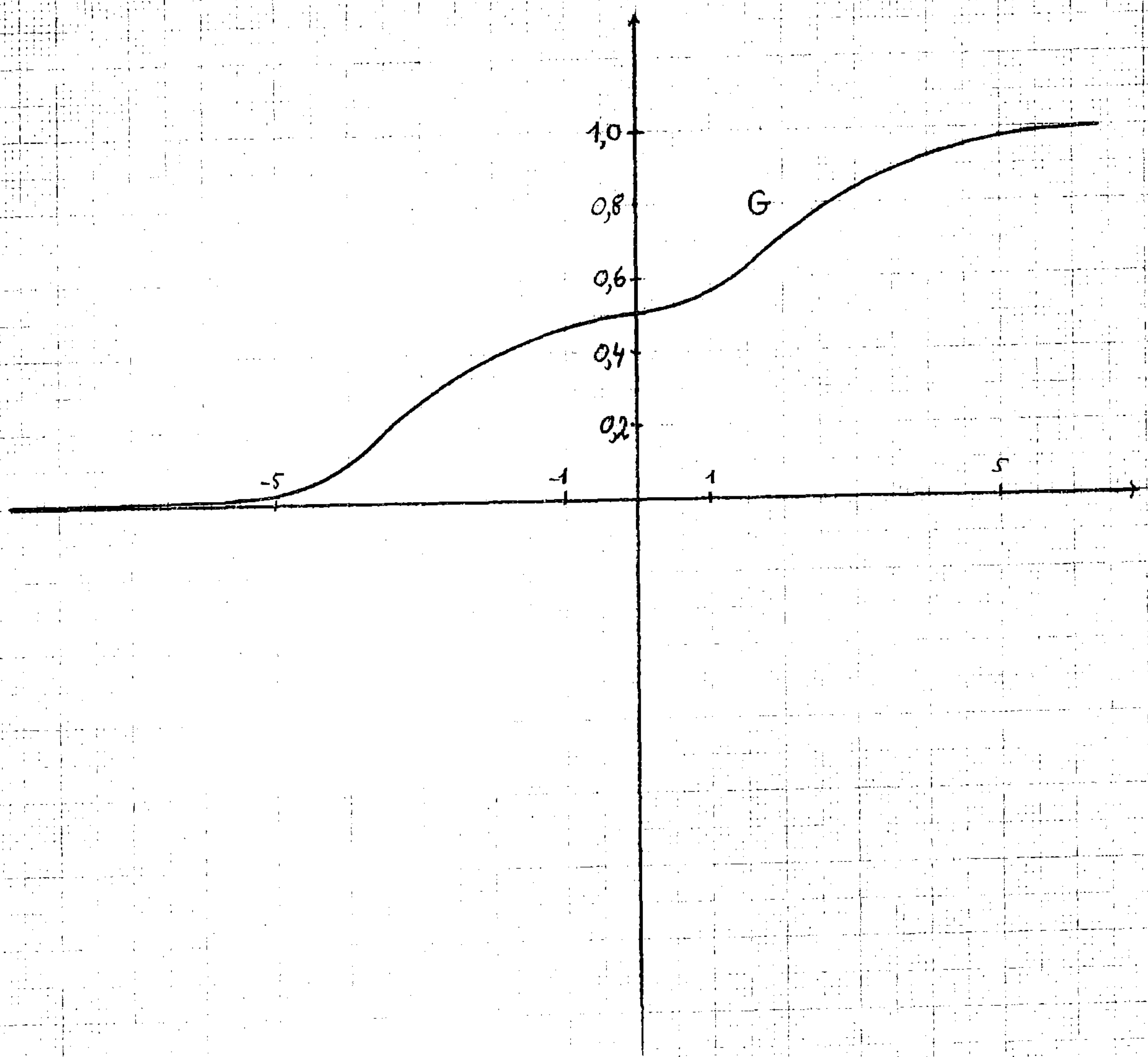
og

II	0,2	1,0	2,0	2,8	3,6	5,6	6,0	6,6	7,2	8,9.

Det vides, at den ene af stikprøverne tilhører G's positive type.

Afgør, ved hjælp af et fraktildiagram, hvilken af stikprøverne det (rimeligvis) drejer sig om, og bestem de tilhørende positions- og skalaparametre.

(Opgaven fortsættes)


1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
G
-5
-1
1
5