

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1978

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpe midler er tilladt. (Lommeregner er ikke tilladt).

Ved bedømmelsen af opgavesættet vægtes opgave 4 dobbelt.

Opgave 1.

Find Fourierrækken på reel form for funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{for } -\pi \leq t < 0 \\ \sin t & \text{for } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Opgave 2.

Find samtlige funktioner $f = f(t)$ definerede for $t \geq 0$, som for $t \geq 0$ opfylder ligningen

$$f(t) + f'(t) - 2 \int_0^t f(\tau) d\tau = 3 .$$

Opgave 3.

I C^2 betragtes vektorerne $\varphi_1 = (1,0)$ og $\varphi_2 = (1,1)$.
 En operator T på C^2 fremstilles med hensyn til basen
 (φ_1, φ_2) ved matricen

$$\begin{Bmatrix} -1 & -26 \\ 0 & 25 \end{Bmatrix} .$$

Idet I betegner den identiske operator på C^2 , skal man
 bestemme 4 operatorer S , der alle opfylder ligningen

$$S^2 - 2S + I = T .$$

Operatorerne ønskes karakteriseret ved den matrix, der repræsenterer dem med hensyn til basen (φ_1, φ_2) .

Opgave 4.

Gruppen $G = \{e, e^*, a_1, a_2, a_1^*, a_2^*, b, b^*\}$ har følgende kompositionstabel

G	e	e*	a ₁	a ₂	a ₁ *	a ₂ *	b	b*
e	e	e*	a ₁	a ₂	a ₁ *	a ₂ *	b	b*
e*	e*	e	a ₁ *	a ₂ *	a ₁	a ₂	b*	b
a ₁	a ₁	a ₁ *	e	b	e*	b*	a ₂	a ₂ *
a ₂	a ₂	a ₂ *	b*	e	b	e*	a ₁ *	a ₁
a ₁ *	a ₁ *	a ₁	e*	b*	e	b	a ₂ *	a ₂
a ₂ *	a ₂ *	a ₂	b	e*	b*	e	a ₁	a ₁ *
b	b	b*	a ₂ *	a ₁	a ₂	a ₁ *	e*	e
b*	b*	b	a ₂	a ₁ *	a ₂ *	a ₁	e	e*

(opgave 4 fortsat)

Nedenstående punkter ønskes diskuteret direkte på basis af kompositionstabellen:

1. Bestem elementernes orden, gruppens centrum samt opdelingen af gruppen i konjugeretklasser.
2. Bestem samtlige ikke-trivielle invariante undergrupper af G . Findes der blandt disse cykliske undergrupper? Er alle cykliske undergrupper af G invariante?
3. Bestem gruppens karaktertabel. De principper, der anvendes, skal klart fremgå af besvarelsen.
4. Bestem en unitær, irreducibel og ikke-lineær repræsentation af G . Alle 8 matricer $\underline{D}(g)$; $g \in G$ ønskes opskrevet. [Vejledning: Bestem $\underline{D}(e^*)$. Sørg for, at $\underline{D}(a_1)$ er på diagonalform, og bestem så $\underline{D}(a_1)$. Indfør parametre svarende til elementerne i $\underline{D}(a_2)$].