KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1977/78

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer

Hjælpemidler er tilladt. (Lommeregnere er <u>ikke</u> tilladt).

Opgave nr. 1.

Betegn med L^2 Hilbertrummet $L^2([-\pi,\pi],\frac{1}{2\pi})$. Lad, for $n = \dots,-1,0,1,\dots$, $\varphi_n \in L^2$ være funktionen

$$\varphi_n(t) = e^{int} \; ; \; -\pi \leq t \leq \pi .$$

Operatoren T på L^2 er givet ved, at det for enhver funktion $x \in L^2$ gælder, at

$$\langle Tx,\varphi_n\rangle = \langle x,\varphi_n\rangle + \langle x,\varphi_{n+1}\rangle \; ; \quad n = \dots,-1,0,1,\dots .$$

Undersøg, om T har nogen egenværdier.

Opgave nr. 2.

Operatorerne T_1,T_2,T_3 og T_4 på $\mathbb{C}^2$ repræsenteres med hensyn til den kanoniske basis ved matricerne

$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{Bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Bmatrix} , \; \underline{\underline{T}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} , \; \underline{\underline{T}}_3 = \begin{Bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{Bmatrix} \text{ og } \underline{\underline{T}}_4 = \begin{Bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Bmatrix} .$$

Hvilke af operatorerne er normale, hvilke er selvadjungerede, og hvilke er unitære?

(Opgaven fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1977/78
Matematik B, kemi-opgivelser.

Find for enhver af operatorerne T_1, T_2, T_3 og T_4 samtlige egenværdier, og afgør, for hvilke af operatorerne der findes egenvektorer, som står vinkelret på hinanden.

Opgave nr. 3.

Idet f og g betegner funktionerne

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; \ t \geq 0 \\ 0 & ; \ t < 0 \end{cases} \quad , \quad g(t) = \begin{cases} 0 & ; \ t \geq 0 \\ e^{-2|t|} & ; \ t < 0 \end{cases} \quad ,$$

skal man bevise formlerne

$$f' = -f + \delta \ , \ g' = 2g - \delta \ .$$

hvor de afledede skal forstås i distributionsforstand.

Bestem dernæst foldningen

$$h * \left(\tfrac{2}{3}\delta + \tfrac{1}{3}\delta' - \tfrac{1}{3}\delta''\right) ,$$

hvor h betegner funktionen

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; \ t \geq 0 \\ e^{-2|t|} & ; \ t < 0 \end{cases} \ .$$

Find sluttelig en distribution k således, at

$$k * h = f \ .$$

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1977/78

Matematik B, kemi-opgivelser

Opgave nr. 4.

I $\mathbb{R}^3$ er givet 8 punkter. 4 af punkterne ligger i planen $z = \frac{1}{2}$ og danner et kvadrat med kantlængderne 1, og de resterende 4 punkter ligger i planen $z = -\frac{1}{2}$ og danner ligeledes et kvadrat med kantlængderne 1.

Bestem, for enhver mulig beliggenhed af de 8 punkter, den tilhørende fuldstændige symmetrigruppe.

Opgave nr. 5.

Angiv opdelingen af permutationsgruppen S_4 i konjugeretklasser, og bestem for enhver af permutationerne

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

den konjugeretklasse, permutationen tilhører.

Bevis, f.eks. ved henvisning til et resultat i noterne, at der findes en 4-dimensional repræsentation D af S_4 således, at

$$\underline{\underline{D}}(\sigma_1) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{D}}(\sigma_2) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{D}}(\sigma_3) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

og bestem den tilhørende karakter.

Giv en udførlig redegørelse for, hvorledes karaktertabellen for S_4 kan bestemmes.