KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1977

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt. (Lommeregnere er ikke tilladt).

Opgave 1

Med L^2 betegnes Hilbertrummet $L^2([0,1];\rho)$, hvor $\rho(t) = 1;\ 0 \leq t \leq 1$.

Funktionerne x_1 og x_2 er definerede ved

$$x_1(t) = 1;\ 0 \leq t \leq 1,$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\ -1 & \text{for } \tfrac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Idet θ er en reel parameter, betegner f_θ funktionen givet ved

$$f_\theta(t) = |t-\theta|;\quad 0 \leq t \leq 1.$$

Bestem, for enhver værdi af parameteren θ i intervallet $0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}$, den funktion g af formen $\alpha x_1+\beta x_2$, hvor α og β er konstanter, for hvilken L^2-afstanden $\|g-f_\theta\|$ er mindst mulig.

(opgavesættet fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977

Matematik B, kemi-opgivelser

Opgave 2

En funktion $f = f(t)$ defineret for $-\infty < t < \infty$ er så "pæn", at den har en Fouriertransformeret $\hat{f}$.

Det vides, at $f(t) = 0$ for $t < 0$ og at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = t\, e^{-t} \quad \text{for} \quad t > 0 ,$$

hvor $g = g(t)$ betegner funktionen

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{for} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{for} \quad t < 0 . \end{cases}$$

Bestem f. (Det anbefales at gøre prøve).

Opgave 3

I Hilbertrummet

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid \Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty\}$$

betragtes operatoren T der med hensyn til den kanoniske basis fremstilles ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Undersøg, om T har reelle egenværdier.

(opgavesættet fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977

Matematik B - kemi-opgivelser

Opgave 4

Bestem karaktertabellen for permutationsgruppen S_4. De principper, der anvendes, skal klart fremgå af besvarelsen.

Opgave 5.

Idet H betegner en terning (heksaeder) og σ en plan som indeholder en kant i H, skal man, for enhver beliggenhed af σ i forhold til H, bestemme gruppen af egentlige isometrier der lader både H og σ invariant.