KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1977

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt. (Lommeregnere er ikke tilladt).

Opgave 1

Med L^2 betegnes Hilbertrummet $L^2([0,1];\rho)$, hvor $\rho(t) = 1;\ 0 \le t \le 1$.

Funktionerne x_1 og x_2 er definerede ved

$$x_1(t) = 1;\ 0 \le t \le 1,$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le t \le \tfrac{1}{2} \\ -1 & \text{for } \tfrac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Idet θ er en reel parameter, betegner f_θ funktionen givet ved

$$f_\theta(t) = |t-\theta|;\quad 0 \le t \le 1.$$

Bestem, for enhver værdi af parameteren θ i intervallet $0 \le \theta \le \tfrac{1}{2}$, den funktion g af formen $\alpha x_1+\beta x_2$, hvor α og β er konstanter, for hvilken L^2-afstanden $\|g-f_\theta\|$ er mindst mulig.

(opgavesættet fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1977

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt. (Lommeregnere er ikke tilladt).

Opgave 1

Med L^2 betegnes Hilbertrummet $L^2([0,1];\rho)$, hvor $\rho(t) = 1;\ 0 \leq t \leq 1.$

Funktionerne x_1 og x_2 er definerede ved

$$x_1(t) = 1;\ 0 \leq t \leq 1,$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{for } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Idet θ er en reel parameter, betegner f_θ funktionen givet ved

$$f_\theta(t) = |t-\theta|;\quad 0 \leq t \leq 1.$$

Bestem, for enhver værdi af parameteren θ i intervallet $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, den funktion g af formen $\alpha x_1+\beta x_2$, hvor α og β er konstanter, for hvilken L^2-afstanden $\|g-f_\theta\|$ er mindst mulig.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977

Matematik B, fysik-geofysik-opgivelser

Opgave 2

En funktion $f = f(t)$ defineret for $-\infty < t < \infty$ er så "pæn", at den har en Fouriertransformeret $\hat{f}$. Det vides, at $f(t) = 0$ for $t < 0$ og at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = t\, e^{-t} \quad \text{for} \quad t > 0 ,$$

hvor $g = g(t)$ betegner funktionen

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{for} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{for} \quad t < 0 . \end{cases}$$

Bestem f. (Det anbefales at gøre prøve).

Opgave 3

I Hilbertrummet

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid \Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty\}$$

betragtes operatoren T der med hensyn til den kanoniske basis fremstilles ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

Undersøg, om T har reelle egenværdier.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977

Matematik B, fysik-geofysik-opgivelser

Opgave 4

En lystfisker tager hver morgen før arbejde på en kort fisketur til en lille sø. Sandsynligheden for at han fanger en gedde på en enkelt fisketur er 1/15, dog er det således, at der er så få gedder i søen, at sandsynligheden for at fange en gedde på en fisketur, efter han har fanget den første gedde kun er 1/2o.

Hvor lang er middelventetiden til lystfiskeren har fanget én gedde?

Hvor lang er middelventetiden til lystfiskeren har fanget to gedder?

(Det kan med fordel udnyttes, at for $|x| < 1$ er $\Sigma_1^{\infty} n\, x^{n-1} = (1-x)^{-2}$).

Opgave 5

Lad $x_1, \ldots, x_{20}$ være en stikprøve fra en fordeling, hvori der indgår en ukendt parameter θ. Lad $X_1, \ldots X_{20}$ være de tilhørende stokastiske variable. Det vides, at den stokastiske variabel

$$\frac{1}{20}(X_1 + \ldots + X_{20}) - \theta$$

(opgaven fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1977
Matematik B, fysik-geofysik-opgivelser

(opgave 4 fortsat)

har en fordeling, hvis fordelingsfunktion F foreligger grafisk (se figuren). Idet $\bar{x} = 5$, skal man bestemme et 80% konfidensinterval for θ.