KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1976/77

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1

Om to funktioner $f = f(t)$ og $g = g(t)$ der er definerede for $t \geq 0$ vides, at $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ og $g(0) = 1$, $g'(0)=2$. Lad $F = F(z)$ og $G = G(z)$ betegne de Laplacetransformerede af f og g. Find, udtrykt ved F og G, formler for de Laplacetransformerede af f'' og g''.

Idet det nu yderligere antages, at $f'' = g$ og $g'' = f$, skal G bestemmes. Find til slut f og g.

Opgave nr. 2

I Hilbertrummet H med den fuldstændige ortonormalbasis $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ betragtes operatorerne S og T definerede ved ligningerne

$$\langle Sx,\varphi_n\rangle = \frac{n}{n+1}\langle x,\varphi_{n+1}\rangle \quad ; \quad n \geq 1$$
$$\langle Tx,\varphi_n\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x,\varphi_{n+1}\rangle \quad ; \quad n \geq 1 ,$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

der er gyldige for alle $x \in H$.

Bestem punktspektret både for S og for T.

Opgave nr. 3

I C^2 betragtes vektorerne $\varphi_1 = (3,3)$ og $\varphi_2 = (-2,0)$. En operator T på C^2 fremstilles med hensyn til basen (φ_1, φ_2) ved matricen

$$\begin{Bmatrix} e^{-1} & 0 \\ -\frac{3}{2}e^3 + \frac{3}{2}e^{-1} & e^3 \end{Bmatrix} .$$

Bevis, at T er selvadjungeret.

Find en operator S således, at $e^S = T$. S ønskes karakteriseret ved den matrix, der fremstiller S med hensyn til basen (φ_1, φ_2).

Opgave nr. 4

Find sandsynligheden i % for, at der blandt 4 tilfældigt udvalgte personer findes 2, der har fødselsdag i samme måned. Find også sandsynligheden for, at der blandt 4 tilfældigt udvalgte personer findes 3, der har fødselsdag i samme måned.

(opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1976/77
Matematik B, fysik-geofysik

Opgave nr. 5

For enhver positiv værdi af parameteren θ betragtes fordelingen med tæthedsfunktion

$$f(x|\theta) = K(\theta)x(\theta-x) \; ; \quad 0 \leq x \leq \theta \; .$$

Her er $K(\theta)$ en af θ afhængig konstant.

Bestem $K(\theta)$.

Opskriv et udtryk for likelihoodfunktionen for en stikprøve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fra fordelingen $f(x|\theta)$.

Beregn maksimum-likelihood estimatoren for θ i det tilfælde, hvor stikprøven er af størrelsen 2 og $x_1 = x_2 = 1$.