KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1976

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1.

Find Fourierrækken på reel form for funktionen

$$f(t) = e^{|t|}, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Opgave nr. 2.

I $\mathbb{C}^2$ betragtes basen bestående af de to vektorer e_1 og e_2 givet ved

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (1,1).$$

Med T_1, T_2 og T_3 betegnes 3 operatorer på $\mathbb{C}^2$. De er givet ved, at de med hensyn til basen (e_1, e_2) repræsenteres ved matricerne

$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{T}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{Bmatrix} \text{ og } \underline{\underline{T}}_3 = \begin{Bmatrix} 1+i & 2i \\ -i & 1-i \end{Bmatrix}$$

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

Undersøg, hvilke af disse operatorer der er selvadjungerede, og hvilke der er unitære.

Det viser sig, at netop én af operatorerne er selvadjungeret, men ikke unitær. Beregn spektret for denne operator.

Opgave nr. 3.

Distributionen $f = f(t)$ har Fouriertransformationen

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\omega^2}{1+\omega^2} + i\frac{\omega}{1+\omega^2} + \pi\delta(\omega-1) + \pi\delta(\omega+1)$$

Bestem f.

Opgave nr. 4.

Et pilleglas indeholder piller af fabrikaterne A,B og C. 60% af pillerne er af fabrikat A, 20% af fabrikat B og 20% af fabrikat C. 5% af pillerne af fabrikat A er aktive, 10% af pillerne af fabrikat B er aktive og 25% af pillerne af fabrikat C er aktive.

En pille vælges tilfældigt fra pilleglasset. Hvad er sandsynligheden for at den er aktiv? Hvis pillen viser sig at være aktiv, hvilket fabrikat er det så mest sandsynligt den er af?

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1976
Matematik B, fysik-geofysik

Opgave nr. 5.

For enhver værdi af Θ i intervallet $[0,\infty[$ betegner $f(x|\Theta)$ tæthedsfunktionen med støtte i $[0,1]$ givet ved

$$f(x|\Theta) = K(\Theta)x^{\Theta}(1-x)^{\Theta} \; ; \; 0 \leq x \leq 1.$$

Her er $K(\Theta)$ en af Θ afhængig konstant der sikrer, at $f(x|\Theta)$ bliver en tæthedsfunktion.

Man er interesseret i at teste nulhypotesen $H_0:\Theta = 0$ mod den alternative hypotese $H_1:\Theta = 1$. Af praktiske grunde - man kan f.eks. forestille sig, at de enkelte observationer er særdeles vanskelige at gennemføre - ønsker man at basere sit test på én enkelt observation, altså på en stikprøve af størrelse 1 fra $f(x|\Theta)$.

For enhver værdi af t med $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ betragtes det test af $H_0:\Theta = 0$ mod $H_1:\Theta = 1$, der er givet ved forkastelsesområdet

$$C_t = \{x \mid \tfrac{1}{2} - t \leq x \leq \tfrac{1}{2} + t\}$$

Beregn, som funktion af t, niveauet og styrken af dette test.

Bevis, at de foreslåede tests er bedste tests.