KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1975-76.

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Mundtlig eksamen i MAT B afholdes for samtlige kandidater fredag den 30. januar i lokale A102.

Opgave nr. 1.

For funktionen f defineret på intervallet $[-\pi,\pi]$ ved $f(t) = -|t|$, skal man bestemme den funktion g af formen

$$g(t) = \beta_0 + \beta_1 \cos t + \beta_2 \cos(2t),$$

der bedst appreksimerer f i den forstand, at

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 \, dt$$

er mindst mulig.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1975-76.

Matematik B, fysik-geofysik.

Opgave nr. 2.

Med l^2 betegnes Hilbertrummet af komplekse følger $x = (x_1, x_2, \ldots)$ med $\|x\|^2 = \Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty$.

Med T betegnes operatoren på l^2 givet ved

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, \tfrac{1}{2}x_3, \tfrac{1}{3}x_4, \ldots),$$

altså $Tx = y$ med $y_n = n^{-1}x_{n+1}$; $n \geq 1$.

Bestem punktspektret $\sigma_p(T)$ og normen $\|T\|$ og bevis, at for ethvert komplekst tal λ med $|\lambda| > 1$ og ethvert $y \in l^2$ findes et og kun et $x \in l^2$ således, at $Tx - \lambda x = y$.

Opgave nr. 3.

Ved kast med en terning udføres først et indledende kast. Antallet af øjne i dette kast kaldes X. Dernæst udføres de egentlige kast, som består i at terningen kastes det antal gange, øjnene i det indledende kast angiver, altså X gange. Med Y betegnes antallet af 6'ere i de egentlige kast.

Beregn sandsynlighederne $P(Y=6)$ og $P(Y=0)$

Beregn den betingede middelværdi $E(Y|X=4)$ og middelværdien $E(Y)$.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1975-76.

Matematik B, fysik-geofysik.

Opgave nr. 4.

Et tabelværk på 50 sider indeholder ialt 100 trykfejl. Hvad er mest sandsynligt, at en bestemt side indeholder 1 trykfejl, eller at den indeholder 3 trykfejl?

Opgave nr. 5.

Bestem maksimum likelihoodestimatoren for den positive parameter θ hørende til en stikprøve fra fordelingen med tæthedsfunktion

$$f(x|\theta) = \theta^2 x\, e^{-\theta x} \quad ; \; 0 \leq x < \infty.$$

Vis dernæst - uden at komme ind på bestemmelsen af niveau eller styrke - hvordan man for to positive tal θ_0 og θ_1, kan konstruere bedste tests af nulhypotesen $\theta = \theta_0$ mod den alternative hypotese $\theta = \theta_1$.