KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1975

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Om en følge $(x_n)_{n\geq 1}$ af reelle tal vides, at for alle $n \geq 1$ er

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{5}{2^n}.$$

Bevis, at følgen er konvergent, og bestem n således, at

$$|x_n - x| \leq 0.01,$$

hvor x er grænseværdien af $(x_n)_{n\geq 1}$.

Opgave 2.

Lad $(e_n)_{n\geq 1}$ være et ortonormalsystem i Hilbert-rummet H. Undersøg, for hvilke værdier af den komplekse parameter θ rækken

(opgaven fortsættes)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\theta)^n}{\sqrt{n}} e_n$$

er konvergent i H.

Opgave 3.

I Hilbertrummet

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots) : \Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty\}$$

betragtes operatoren T, der med hensyn til den kanoniske basis fremstilles ved matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

(altså $T(x_1, x_2, \cdots) = (y_1, y_2, \cdots)$, hvor $y_1 = \Sigma_2^\infty \frac{1}{n} x_n$ og $y_n = (n-1)^{-1} x_1$ for $n \geq 2$).

Bevis, at T er en begrænset operator.

Bestem punktspektret, og bevis, at ethvert punkt uden for punktspektret er regulært.

(opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1975
Matematik B, Kemi.

Opgave 4.

Med Λ betegnes punktgitret i $\mathbb{R}^3$ der som basis har de tre vektorer a_1, a_2 og a_3 givet ved

$$a_1 = (0,1,1), \quad a_2 = (1,0,1), \quad a_3 = (1,1,0).$$

Bevis, at Λ netop består af samtlige punkter $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, hvor x, y og z er hele tal med en lige sum.

Hvilke punkter i Λ forskellige fra begyndelsespunktet har minimal afstand til begyndelsespunktet?

Bestem punktgruppen for Λ.

Opgave 5.

Bestem karaktertabellen for diedergruppen D_{12}. De principper, der anvendes, skal klart fremgå af besvarelsen.