

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1975

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpe midler er tilladt.

Opgave 1.

For $r > 0$ betegner k_r den lukkede kurve

$$k_r : 1 + re^{it}; t \in [0, 2\pi].$$

Beregn værdien af kurveintegralet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k_r} \frac{e^z dz}{z^2 + z}$$

for enhver værdi af r , for hvilken dette er defineret.

Opgave 2.

Lad $(e_n)_{n \geq 1}$ være et ortonormalsystem i Hilbertrummet

H. Undersøg, for hvilke værdier af den komplekse parameter

θ rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\theta)^n}{\sqrt{n}} e_n$$

er konvergent i H.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 3.

I Hilbertrummet

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty\}$$

betragtes operatoren T , der med hensyn til den kanoniske basis fremstilles ved matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

(altså $T(x_1, x_2, \dots) = (y_1, y_2, \dots)$, hvor $y_1 = \sum_2^\infty \frac{1}{n} x_n$ og $y_n = (n-1)^{-1} x_1$ for $n \geq 2$).

Bevis, at T er en begrænset operator.

Bestem punktspektret og bevis, at ethvert punkt udenfor punktspektret er regulært.

Opgave 4.

Til hvert tidspunkt $k = 1, 2, 3, \dots$ udføres et kast med to terninger. Lad den stokastiske variable X være tidspunktet for det første kast, for hvilket de to terninger viser et forskelligt antal øjne. Find X 's fordeling og middelværdi. [Ved beregning af middelværdien, kan man f.eks. udnytte formlen $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_0^\infty (n+1)x^n$; $|x| < 1$].

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 5.

Undersøg, ved hjælp af et fraktildiagram, om den ordnede stikprøve $x_{(i)}$; $i = 1, 2, \dots, 12$ givet i tabellen med rimelighed kan antages at være fra en normalfordeling, og bestem i bekræftende fald parametrene i denne.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_{(i)}$	3.40	3.78	3.98	4.24	4.32	4.60	4.72	4.80	5.04	5.28	5.54	5.88

Opgave 6.

En stikprøve x_1, \dots, x_{16} af størrelse 16 vides at være fra en normalfordeling med spredning 1 og (ukendt) middelværdi θ . Konstrueret bedste test med signifikansniveau 5 pct. af hypotesen $H_0: \theta = 1$ mod den alternative hypotese $H_1: \theta = 2$. Beregn styrken af testet.