Københanvs universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1974/75

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1.

Find samtlige komplekse løsninger til ligningen

$$\cosh z = \frac{5}{4}.$$

Opgave nr. 2.

Bestem den funktion y af formen

$$y(t) = \alpha + \beta e^{t} \; ; \quad 0 \leq t \leq 1,$$

der bedst approksimerer funktionen x givet ved

$$x(t) = t \; ; \quad 0 \leq t \leq 1$$

i den forstand, at integralet

$$\int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 dt$$

er mindst muligt.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3.

En operator T på $\mathbb{C}^3$ repræsenteres m.h.t. den kanoniske basis ved matricen

$$\begin{Bmatrix} \frac{\pi}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7\pi}{16} & -\frac{\pi}{16}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{\pi}{16}\sqrt{3} & \frac{5\pi}{16} \end{Bmatrix}.$$

Bestem den matrix, der repræsenterer operatoren $\sin(T)$ m.h.t. den kanoniske basis.

Opgave nr. 4.

$G = \{1, 2, \cdots, 12\}$ er en gruppe med kompositionsforskrift som angivet i tabellen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	3	1	5	6	4	8	9	7	11	12	10
3	3	1	2	6	4	5	9	7	8	12	10	11
4	4	6	5	1	3	2	10	12	11	7	9	8
5	5	4	6	2	1	3	11	10	12	8	7	9
6	6	5	4	3	2	1	12	11	10	9	8	7
7	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
8	8	9	7	11	12	10	2	3	1	5	6	4
9	9	7	8	12	10	11	3	1	2	6	4	5
10	10	12	11	7	9	8	4	6	5	1	3	2
11	11	10	12	8	7	9	5	4	6	2	1	3
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(opgaven fortsættes side 3)

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1974/75
Matematik B, Kemi.

Bestem elementernes orden, centrum, konjugeretklasserne, samtlige invariante undergrupper, og vis ved et eksempel at G indeholder en undergruppe, der ikke er invariant.

Opgave nr. 5

Med A betegnes delmængden af $\mathbb{R}^3$ der består af 6 punkter, dels punkterne

$$(1,1,0), \quad (1,-1,0), \quad (-1,1,0), \quad (-1,-1,0),$$

dels punkterne

$$(0,0,z_1), \quad (0,0,-z_2).$$

Her er z_1 og z_2 parametre, der blot vides at være positive. Med G betegnes den egentlige symmetrigruppe for konfigurationen A, altså gruppen af egentlige isometrier φ således, at $\varphi(A) = A$.

For ethvert parametersæt (z_1,z_2) skal man bestemme G som konkret gruppe og angive opdelingen af G i konjugeretklasser.

Lad D være den 3-dimensionale repræsentation af G bestemt ved, at $\underline{\underline{D}}(\varphi)$ for $\varphi \in G$ er matricen, der repræsenterer φ mht. den kanoniske basis i $\mathbb{R}^3$. For hver konjugeretklasse K i G skal man bestemme $\underline{\underline{D}}(\varphi)$ for et passende valgt element $\varphi \in K$. Undersøg, om D er irreducibel, og vis, hvis D er reducibel, hvorledes man kan bestemme irreducible repræsenta-

(opgaven fortsættes side 4)

tioner, så D er ækvivalent med den direkte sum af disse. (Også denne del af opgaven ønskes gennemført for ethvert parametersæt (z_1, z_2)).