Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1974

MATEMATIK B, KEMI-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1

Bestem ved hjælp af Laplacetransformationen funktionen $f = f(t)$ defineret for $t \geq 0$ således, at $f(0) = 0$ og

$$f'(t) - \int_0^t f(\tau)d\tau = t$$

for all $t \geq 0$.

Opgave nr. 2

Funktionen x defineret på $[-\pi,\pi]$ er givet ved

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi \leq t \leq 0 \\ \sin t & ; \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Bestem funktionens Fourierrække, såvel på kompleks form som på reel form.

Benyt resultatet til at beregne summen af rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

(det anbefales at kontrollere, om resultatet rent numerisk ser rimeligt ud).

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3

Med l^2 betegnes Hilbertrummet af komplekse følger $x = (x_1, x_2, \cdots)$ med $\|x\|^2 = \Sigma_1^\infty |x_n|^2 < \infty$.

For ethvert komplekst tal μ defineres en følge a_μ ved

$$a_\mu = (1, \mu, \mu^2, \mu^3, \cdots).$$

Bestem mængden af de $\mu \in \dot{C}$ for hvilke $a_\mu \in l^2$.

Med T betegnes operatoren på l^2 defineret ved

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \cdots).$$

Bestem punktspektret for T.

Opgave nr. 4

En gruppe G af orden 8 består af det neutrale element e og af elementerne a, a^2, a^3, b, ba, ba^2 og ba^3. Af kompositionstabellen kendes så meget:

	e	a	a^2	a^3	b	ba	ba^2	ba^3
e								
a					ba^3			
a^2			e		ba^2			
a^3								
b					a^2			
ba								
ba^2								
ba^3								

(opgavesættet fortsættes

Beregn på grundlag heraf hele kompositionstabellen (der ønskes ikke en detaljeret redegørelse for, hvorledes hvert eneklt element i tabellen beregnes, men principperne bør fremgå af besvarelsen).

Bevis dernæst, at $\{e,a,a^2,a^3\}$ består af hele konjugeretklasser i G, og bestem disse.

Opgave nr. 5.

Lad A og B være to modstående hjørner i et regulært oktaeder (A og B ligger ikke på samme kant).

Den fuldstændige oktaedergruppe betegnes med $\mathcal{O}_h$.

Undersøg, hvilken punktgruppe der dannes af de isometrier $\varphi \in \mathcal{O}_h$, for hvilke $\varphi(A) = A$ og $\varphi(B) = B$.

Undersøg, hvilken punktgruppe danne af de $\varphi \in \mathcal{O}_h$, for hvilke $\varphi(A) \in \{A,B\}$ og $\varphi(B) \in \{A,B\}$?

Opgave nr. 6

Bestem konjugeretklasserne i diedergruppen D_8.

Vælg et passende retvinklet koordinatsystem i $\mathbb{R}^3$ og betegn med D den 3-dimensionale repræsentation af D_8, man får ved til hver isometri $\varphi \in D_8$ at knytte den tilhørende matrix m.h.t. det valgte koordinatsystem.

For hver konjugeretklasse K i D_8 skal man vælge en isometri $\varphi \in K$ og explicit udregne matricen $\underline{\underline{D}}(\varphi)$.

Vis, at D er reducibel og vis, at der findes irreducible repræsentationer D' og D'' således, at $D = D' \oplus D''$.