

Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1974

MATEMATIK B, FYSIK-GEOFYSIK-OPGIVELSER

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpe midler er tilladt.

Opgave nr. 1

Bestem ved hjælp af Laplacetransformationen funktionen $f = f(t)$ defineret for $t \geq 0$ således, at $f(0) = 0$ og

$$f'(t) - \int_0^t f(\tau) d\tau = t$$

for alle $t \geq 0$.

Opgave nr. 2

Funktionen x defineret på $[-\pi, \pi]$ er givet ved

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ; -\pi \leq t \leq 0 \\ \sin t & ; 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Bestem funktionens Fourierrække, såvel på kompleks form som på reel form.

Benyt resultatet til at beregne summen af rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

(det anbefales at kontrollere, om resultatet rent numerisk ser rimeligt ud).

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 3

Med l^2 betegnes Hilbertrummet af komplekse følger
 $x = (x_1, x_2, \dots)$ med $\|x\|^2 = \sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$.

For ethvert komplekst tal μ defineres en følge
 a_μ ved

$$a_\mu = (1, \mu, \mu^2, \mu^3, \dots).$$

Bestem mængden af de $\mu \in \mathbb{C}$ for hvilke $a_\mu \in l^2$.

Med T betegnes operatoren på l^2 defineret ved

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \dots).$$

Bestem punktspektret for T .

Opgave nr. 4

En skæv mønt har sandsynlighed $3/4$ for krone og $1/4$
for plat. Mønten kastes 5 gange uafhængigt af hinanden.

Beregn den betingede sandsynlighed for at første og sidste
kast blev krone, mens de andre kast blev plat, når det
vides at det samlede antal gange mønten viste krone er 2.

Beregn dernæst den betingede sandsynlighed for samme
hændelse (første og sidste kast krone, de andre plat), men
denne gang under betingelsen at det samlede antal krone højst
er 2.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 5

En fabrik producerer tagpapsøm. Et vist parti består af ialt 20.000 søm, der fordeles i 40 æsker med 500 søm i hver. Partiet indeholder ialt 80 defekte søm (hovedet mangler).

Fabrikanten påstår, at sandsynligheden for, at en æske indeholder 5 eller flere defekte søm, er mindre end 5 pct. Er dette rigtigt (under forudsætning af at sømmene fordeles tilfældigt i æskerne)?

(Man kan med fordel benytte en af tabellerne fra §X.10 i noterne.)

Opgave nr. 6

Man ønsker at undersøge, om det med rimelighed kan antages, at længden af haletudser fra en vis lokalitet er normalfordelt. Ligeledes ønsker man at undersøge, om det med rimelighed kan antages, at vægten af udvoksede frøer fra samme lokalitet er normalfordelt. I bekræftende fald ønskes et skøn over middelværdien og spredningen.

En indsamling af 10 haletudser og måling af deres længder gav følgende resultat (i cm.):

3.45 3.48 3.53 3.58 3.65 3.72 3.79
3.89 4.06 4.50

Indsamling og vejning af 10 frøer gav følgende vægte (i g.):

(opgaven fortsættes)

50.1 55.4 58.0 59.9 62.0 64.4 66.0
68.4 71.2 77.2

Tegn fraktildiagrammer på sandsynlighedspapir for begge stikprøverne og diskuter resultatet. (Selvom talmaterialet er konstrueret, bedes man besvare opgaven, som om det drejede sig om ægte data.)