Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1973-74

MATEMATIK B

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1.

Idet $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} (1 - |t|)^{-1} & ; \ |t|<1 \\ t^5 e^{-|t|} & ; \ |t|\geq 1 , \end{cases}$$

skal man bestemme samtlige intervaller $[a,b]$ med $-\infty \leq a < b \leq \infty$ for hvilke $\int_a^b f(t)dt$ bestemmer et endeligt reelt tal.

Opgave nr. 2.

X

Funktionerne $x=x(t)$ og $y=y(t)$ definerede for $t\geq 0$ er for-

opgave 6

bundne ved ligningerne

$$x' = y + x ,$$

$$y' = y - x .$$

Find, under udnyttelse af Laplacetransformationen, et udtryk for funktionerne x og y, som viser, hvorledes de afhænger af startværdierne $x(0)$ og $y(0)$.

Opgave nr. 3.

Om et andengradspolynomium f defineret på $[-\pi,\pi]$:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

med komplekse koefficienter α_0, α_1 og α_2 vides,

at den funktion af formen

(opgaven fortsætter)

$$\varphi(t) = c_{-1}\, e^{-it} + c_0 + c_1\, e^{it}$$

der bedst approksimerer f i den forstand, at

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t) - \varphi(t)|^2 dt$$

er mindst mulig, er funktionen

$$\varphi(t) = -53i\, e^{-it} + 9\pi^2 i - 43i\, e^{it}.$$

Bestem på grundlag heraf koefficienterne α_o, α_1 og α_2.

Opgave nr. 4.

To operatorer S og T på $\mathbb{C}^3$ repræsenteres ved matricerne

$$\underline{\underline{S}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7/25 & -24/25 \\ 0 & -24/25 & 7/25 \end{Bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{T}} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 16/25 & 12/25 \\ 0 & 12/25 & 9/25 \end{Bmatrix}$$

m.h.t. den kanoniske basis.

Bestem de tre matricer der repræsenterer operatorerne

$$e^{i\pi S}, \; e^{i\pi T} \text{ og } e^{i\pi(S+T)}$$

m.h.t. den kanoniske basis.

Opgave nr. 5.

Anfør uden bevis opdelingen af diedergruppen D_6 i konjugeretklasser. Bestem samtlige cykliske undergrupper i D_6. Bestem en ikke-triviel invariant undergruppe af D_6 som ikke er cyklisk.

(fortsættes)

Opgave nr.6.

En gruppe G med ord(G)=24 består af elementerne $x_1, x_2, \dots, x_{24}$, hvor x_1 er det neutrale element. Udover hovedkarakteren χ_1 har gruppen den lineære karakter χ_2 (se tabellen), og det vides, at gruppen ikke har andre lineære karakterer. Desuden kendes endnu en karakter, χ_3.

Bestem samtlige irreducible karakterer og gruppens inddeling i konjugeretklasser.

[Vis f. eks. først, at der findes netop 5 inækvivalente irreducible repræsentationer med ordnerne henholdsvis 1, 1, 2, 3 og 3.]

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_3	4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0