Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1973

MATEMATIK B

Opgaver til besvarelse i 4 timer

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1.

Find samtlige komplekse løsninger til ligningen

$$\sinh(z) = i .$$

Opgave nr. 2.

Antag, at funktionen $y = y(t)$ er defineret for $t \geq 0$ og tilfredsstiller betingelserne

(1) $$y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0 .$$

Udled en formel, der viser, hvorledes man kan beregne den Laplacetransformerede af y'' , når man kender den Laplacetransformerede af y .

Vis dernæst, hvordan man <u>ved hjælp af Laplacetransformationen</u> kan finde en løsning til differentialligningen

$$y'' - y = 0$$

som tilfredsstiller (1).

(Fortsættes)

Københavns universitet
Mat. B, sommeren 1973.

Opgave nr. 3.

Med $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ betegnes den naturlige basis i l^2, dvs. φ_n er vektoren $(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, hvor 1-tallet står på pladsen n. Undersøg, om følgen $(x_n)_{n\geq 1}$ er konvergent i l^2

1) når $x_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n} \varphi_\nu$,

2) når $x_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_\nu$

og 3) når $x_n = \sum_{\nu=1}^{n} 2^{-\nu} \varphi_\nu$.

Opgave nr. 4.

Undersøg, hvilke af følgende permutationer i S_8, der er konjugerede:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave nr. 5.

T betegner operatoren på $\mathbb{C}^3$, der m.h.t den kanoniske basis repræsenteres ved matricen

(Opgaven fortsættes)

$$\underline{\underline{T}} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix} .$$

Vis, at T har 3 egenværdier, og bestem 3 tilhørende normerede egenvektorer φ_1 , φ_2 , φ_3 .

Gør rede for, at $(\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3)$ er en ortonormalbasis i $\mathbb{C}^3$, og angiv den matrix, der repræsenterer T m.h.t. denne basis.

Vis, at der findes en positiv operator S , således at $S^2 = T$.

Bestem matricen for koordinatskiftet fra $(\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3)$ - koordinater til koordinater m.h.t. den kanoniske basis samt den inverse til denne matrix.

Find matricen $\underline{\underline{S}}$, der repræsenterer S m.h.t. den kanoniske basis (det tilrådes at kontrollere resultatet ved at eftervise ligningen $\underline{\underline{S}}^2 = \underline{\underline{T}}$) .

Opgave nr. 6.

En gruppe G har 6 konjugeretklasser: $K_1 , \cdots , K_6$. karaktertabellen kendes så meget:

(Opgaven fortsættes)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
χ_1	1					
χ_2	1			1	-1	
χ_3	1			-1	1	
χ_4	1			-1	-1	
χ_5			-1	-1		
χ_6				1		

Desuden vides det, at $\mathrm{ord}(G) = 12$, at kommutatorgruppen er $K_1 \cup K_3$ og at der findes elementer x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, hvor $x_\nu \in K_\nu$; $\nu = 2,\cdots,6$, således at

$$x_2 x_4 = x_3 \quad \text{og} \quad x_5 x_6 = x_2 .$$

Bestem på basis af disse oplysninger de manglende tal i karaktertabellen samt antallet af elementer i konjugeretklasserne. Der vil blive lagt vægt på, at de principper, der anvendes, træder klart frem, fx ved henvisninger til resultater fra noterne.