Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1972-73

MATEMATIK B

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1

Idet k betegner kurven i den komplekse plan med parameterfremstilling

$$z(t) = 2i + e^{it} \ ; \ 0 \leqq t \leqq 2\pi \ ,$$

skal man for enhver værdi af den komplekse parameter z som ikke ligger på kurven k beregne værdien af kurveintegralet

$$\int_k \frac{\operatorname{Log}\zeta \, d\zeta}{(\zeta-2i)(\zeta-z)} \ .$$

Opgave nr. 2

Udregn Fourierrækken på kompleks form for funktionen

$e^{i\frac{t}{2}}$; $t \in [-\pi,\pi]$.

Bevis ved hjælp heraf formlen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

(Forts.)

Opgave nr. 3

Distributionen

$$\pi e^{-i\omega}(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) + \frac{1}{1+i\omega}$$

er den fouriertransformerede af en funktion.

Bestem denne.

Opgave nr. 4

I $\mathbb{R}^3$ betragtes de 4 A-punkter

$$A_1 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ 1)\ ,\ A_2 = (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ 1)\ ,$$

$$A_3 = (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 1)\ ,\ A_4 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ 1)$$

og de 4 B-punkter

$$B_1 = (\ 1\ ,\ 0\ ,\ -1)\ ,\ B_2 = (0\ ,\ 1\ ,\ -1)\ ,$$

$$B_3 = (-1\ ,\ 0\ ,\ -1)\ ,\ B_4 = (0\ ,\ -1\ ,\ -1)\ .$$

Med G betegnes gruppen af isometrier, egentlige såvel som uegentlige, der fører ethvert A-punkt over i et A-punkt og ethvert B-punkt over i et B-punkt.

Find G's elementer, konjugeretklasserne i G og samtlige normale undergrupper af G .

(Forts.)

Opgave nr. 5

En gruppe har konjugeretklasserne K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 og K_6, der indeholder henholdsvis 1, 1, 2, 2, 3 og 3 elementer.

I tabellen er angivet nogle funktioner χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 og χ_5, der alle vides at være karakterer.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
χ_1	1	-1	-1	1	1	-1
χ_2	1	-1	-1	1	-1	1
χ_3	2	-2	1	-1	0	0
χ_4	2	-2	-2	2	0	0
χ_5	4	-2	1	1	2	0

Hvilke af disse er irreducible karakterer?

For de reducible karakterer skal man angive opspaltningen i irreducible karakterer.

Opgave nr. 6

For hvilke værdier af de reelle parametre α og β er integralet

$$\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt$$

konvergent?