Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1972

MATEMATIK B

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1.

En reel talfølge $x_1, x_2, \ldots$ opfylder de to krav

$$x_1 = 0 ,$$

$$| x_{n+1} - x_n | \leqq \frac{100}{n(n+1)} \; ; \; n = 1,2,\ldots .$$

Bevis, at talfølgen er konvergent.

Bestem et tal $a > 0$ således, at grænseværdien med sikkerhed tilhører intervallet $[-a,a]$ .

Opgave nr. 2.

Bestem samtlige komplekse løsninger til ligningen

$$\sin(z) = \frac{e^2+1}{2e} .$$

Opgave nr. 3.

Ved et trigonometrisk polynomium af $n$'te grad forstås som bekendt en funktion af formen

(Opgaven fortsættes)

$$\frac{1}{2} a_o + \Sigma_1^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) .$$

For funktionen $x$ defineret på $[-\pi, \pi]$ ved

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi \leqq t \leqq 0 \\ t & \text{for} \quad 0 \leqq t \leqq \pi , \end{cases}$$

skal man bestemme det trigonometriske polynomium $y$ af 2'den grad der bedst approksimerer funktionen $x$ i den forstand, at fejlkvadratet

$$\|x-y\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t) - y(t)|^2 \, dt$$

er mindst mulig.

Udregn en omtrentlig værdi af fejlkvadratet (man kan f.eks. sætte $\pi^2 \sim 10$) .

## Opgave nr. 4.

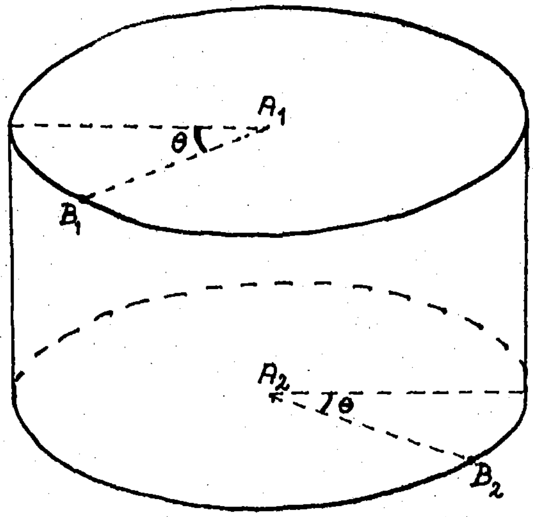
Diedergruppen $D_3$ er som bekendt den egentlige punktgruppe hørende til en ligesidet trekant ABC. I rummet indføres et koordinatsystem ved som begyndelsespunkt at vælge centret O for trekanten ABC og som to af de tre basisvektorer at vælge vektorerne $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$ . Den tredie basisvektor vælges så den står vinkelret på trekantens plan. For hvert $x \in D_3$ betegner $\underline{\underline{D}}(x)$ matricen for den lineære transformation $x$ med hensyn til det valgte koordinatsystem. Herved bestemmes en repræsentation D af $D_3$ .

(Opgaven fortsættes)

Angiv eksplicit, for hvert $x \in D_3$, matricen $\underline{\underline{D}}(x)$ .

Skriv repræsentationen som en direkte sum af irreducible repræsentationer.

Opgave nr. 5.




En figur i rummet består af 4 punkter, to A-punkter, der benævnes $A_1$ og $A_2$, og to B-punkter, der benævnes $B_1$ og $B_2$. Punkternes beliggenhed i forhold til hinanden fremgår af figuren, hvor punkterne er indlagt i en omdrejningscylinder; $A_1$ og $A_2$ ligger på cylinderens omdrejningsakse, $B_1$ og $B_2$ på cylinderens overflade. Beliggenheden afhænger af parameteren $\theta$, der opfylder ulighederne $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Med $G_\theta$ betegnes den fuldstændige symmetrigruppe hørende til figuren, altså gruppen af alle isometrier - egentlige såvel som uegentlige - der fører ethvert A-punkt over i et A-punkt og ethvert B-punkt over i et B-punkt.

Bestem for enhver værdi af parameteren $\theta$ elementerne i $G_\theta$ , og angiv tillige, hvilken abstrakt gruppe $G_\theta$ tilhører. Der ønskes en redegørelse for at $G_\theta$ indeholder de fundne isometrier og ikke andre.