Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1971-72

MATEMATIK B

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1

I $\mathbb{R}^3$ indføres et sædvanligt treretvinklet koordinatsystem. Med A og B betegnes de to delmængder af $\mathbb{R}^3$, hver bestående af 4 punkter, givne ved

$$A = \{(1,1,0),\ (-1,1,0),\ (-1,-1,0),\ (1,-1,0)\},$$

$$B = \{(1,0,1),\ (1,0,-1),\ (-1,0,1),\ (-1,0,-1)\}.$$

Bestem de egentlige isometrier af $\mathbb{R}^3$ på sig selv som har den egenskab, at hvert punkt i A føres over i et punkt i A, og at hvert punkt i B føres over i et punkt i B.

Hvilken abstrakt gruppe danner disse isometrier ?

Opgave nr. 2

Undersøg, for hvilke komplekse z rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n+1}}{z^n}$$

er konvergent, og skitser på en figur den derved fremkomne punktmængde.

(Forts.)

Opgave nr. 3

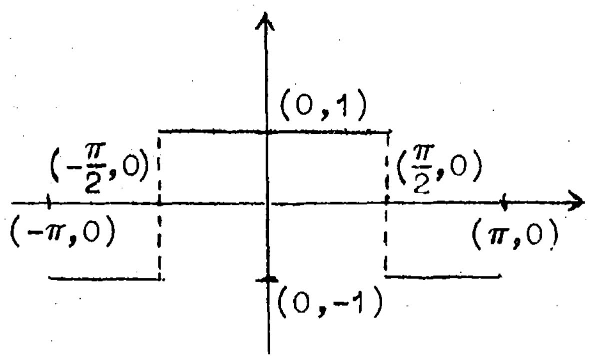
Idet k betegner den lukkede kurve med parameterfremstilling

$$k:\ 1 + e^{it};\quad t \in [0,2\pi]\ ,$$

skal man for enhver værdi af z, der ikke tilhører k, beregne værdien af integralet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\xi^2 d\xi}{(\xi-1)(\xi-z)}\ .$$

Opgave nr. 4



For funktionen skitseret på figuren skal man udregne Fourierrækken; denne ønskes skrevet som en uendelig række i $\cos(nx)$.

Beregn dernæst summen af den uendelige række

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$$

(som kontrol på ens regninger anbefales det at udregne resultatet med 1 decimal og se, om det ser rimeligt ud).

(Forts.)

Opgave nr. 5

Beregn foldningen $f * g$, hvor f og g er givet ved

$$f(t) = \begin{cases} e^{1-t} & \text{for } t \geq 1 \\ 0 & \text{for } t < 1 \end{cases}$$

og

$$g(t) = \begin{cases} e^{1+t} & \text{for } t \leq -1 \\ 0 & \text{for } t > -1 \end{cases} .$$

Opgave nr. 6

En gruppe af orden 24 har 5 konjugeretklasser.

Angiv antallet af irreducible karakterer og bestem ordnerne af de tilhørende repræsentationer.

Det oplyses nu yderligere, at elementantallene i konjugeretklasserne K_1, K_2, K_3, K_4 og K_5 er henholdsvis 1,3,6,6 og 8.

Idet χ_1, χ_2, χ_3 og χ_4 givet i tabellen alle vides at være karakterer, skal man afgøre, hvilke af dem der er irreducible samt bestemme de manglende irreducible karakterer.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
χ_1	1	1	-1	-1	1
χ_2	3	3	-1	-1	0
χ_3	3	-1	1	-1	0
χ_4	6	2	0	2	0