Københavns universitet

NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN

Sommeren 1971

MATEMATIK B

Opgaver til besvarelse i 4 timer.
Hjælpemidler er tilladt.

Opgave nr. 1

En gruppe G har 6 konjugeretklasser $K_1, \ldots, K_6$. Af gruppens karaktertabel kendes så meget:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1		1	-1	-1
χ_3	1	-1		-1	-1	
χ_4		-1	1			
χ_5	2	-2	-1	1		
χ_6	2	2	-1			

Beregn de resterende tal i tabellen, gruppens orden og elementantallene i de 6 konjugeretklasser. Der ønskes gjort rede for, hvorledes tallene er beregnede.

Hvilke elementer består G's kommutatorgruppe af?

Med D betegnes en repræsentation af G, hvis karakter χ er givet ved tabellen

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
χ	3	-1	0	2	-1	-1

Vis, at D er ækvivalent med en direkte sum af to irreducible repræsentationer.

(Opgavesættet forts.)

Københavns Universitet
Mat. B, sommeren 1971

Opgave nr. 2

Udregn fourierrækken for funktionen f givet ved $f(x) = x^2$; $-\pi \leq x \leq \pi$. Bevis formlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$

Opgave nr. 3

Formålet med denne opgave er, at bevise formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Som vejledning anføres, at man kan betragte den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^6} ; \quad z \in \mathbb{C}$$

og integrere denne langs kurven sammensat af liniestykket $z = x$; $-R \leq x \leq R$ og halvcirklen $z = Re^{i\theta}$; $0 \leq \theta \leq \pi$.

Opgave nr. 4

Distributionen

$$-2\pi\, e^{-i\omega} \cdot \delta''(\omega) + \frac{1}{1-i+i\omega} ; \quad \omega \in \mathbb{R}$$

er den fouriertransformerede af en funktion f.

Bestem denne.

(Opgavesættet forts.)

Københavns Universitet
Mat. B, sommeren 1971

Opgave nr. 5

Beregn foldningen $f*g$, hvor f og g er givet ved

$$f = \delta - \delta''$$
$$g(t) = \tfrac{1}{2}e^{-|t|}.$$

Opgave nr. 6

Med H betegnes hexaedergruppen d.v.s. gruppen af egentlige isometrier af det 3-dimensionale rum på sig selv som lader et hexaeder (altså en terning) invariant.

G betegner mængden bestående af de isometrier i H der har den egenskab, at enhver af hexaederets flader enten afbildes i sig selv eller i den modstående flade.

Gør rede for at G er en undergruppe i H og at G er isomorf med Kleins firergruppe.

Er G en invariant undergruppe?