Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1990/91

MATEMATIK A

BEMÆRK: Eksaminander med bestået midtvejseksamen i Matematik A fra januar 1990, der ønsker at gå op i forårspensum, regner opgave 11 - 19 og aflevere senest kl. 11.05. Afleveringstidspunktet skal af vagtpersonalet markeres på besvarelsen.
Eksaminander, der går op i hele årets pensum, tilkendegiver dette ved aflevering efter kl. 11.

Efterårspensum er omfattet af opgave 1 - 10:

1. Opskriv en parameterfremstilling for skæringslinien mellem planen $x + y - z = 0$ og planen $x - y - z = 2$.

2. Reducer totalmatricen for nedenstående system til echelonform og afgør derved for hvilke værdier af k ligningssystemet er konsistent. Systemet skal *ikke* løses.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ x + kz &= 0 \\ 3x + 4y - kz &= 0 \end{aligned}$$

3. Angiv en serie rækkeoperationer der inverterer denne matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Tegn en skitse af det begrænsede område som graferne for $y = x/3$ og $y = x^2$ afgrænser. Roter området omkring y-aksen og udregn rumfanget af det omdrejningslegeme der derved dannes.

5. Vis at funktionen $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(1/x)$ er konstant og bestem dens værdi.

6. Angiv en ligning både i rektangulære og i polære koordinater for cirklen gennem $(0,0)$ med centrum i $(3,0)$. Begrund dit svar.

7. Find $\lim_{x\to\infty} (\cos(1/x))^x$.

8. Lad $\underline{r}(t) := \langle \operatorname{Arccos} t, \operatorname{Arcsin} t \rangle$, $t \in]-1,1[$. Find et udtryk for hastigheden i denne banebevægelse.

9. Find mindste- og størsteværdi for funktionen $2x^2 + 2y^2 - 5y$ på kvadratet med hjørner $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ og $(0,1)$

10. Opskriv det tredie Taylorpolynomium p_3 for funktionen $\ln x - x$ med udviklingspunkt $a = 1$.

(Opgavesættet fortsætter med forårspensum - vend!)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1990/91
Matematik A

Forårspensum er omfattet af opgave 11-19

11. Find en basis for løsningsrummet til systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 10x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

12. Afgør om denne matrix er diagonaliserbar

$$A := \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Find egenrummet hørende til egenværdien 9.

13. Lad R være området i 1. kvadrant begrænset af linierne $y = x$ og $y = 0$ og cirklen $x^2 + y^2 = 1$. Brug polære koordinater til at udregne integralet $\iint_R (1+x^2+y^2)^2 dA$.

14. Find arealet af den del af fladen $z = y^2 - x^2$, der ligger inde i cylinderen $x^2 + y^2 = 4$.

15. Udregn $\int_C xy\, ds$, hvor C er kurven $\langle 4t, 9t, 7t \rangle$, $t \in [0,5]$.

16. Benyt Green's sætning til at udregne $\oint_C xdx - xydy$, hvor C er kurven sammensat af $r = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0,\pi]$, og liniestykket $[0,2]$ på x-aksen (positivt orienteret).

17. Udregn direkte eller ved hjælp af Stokes' sætning $\oint_C \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds$, når $\underline{F} = y\,\underline{i} + z\,\underline{j} + x\,\underline{k}$ og C er skæringskurven mellem planen $z = y$ og cylinderen $x^2 + y^2 = 2x$, orienteret mod uret, når C ses ovenfra.

18. Find den reelle løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 8\,y = 0,$$

for hvilken $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

19. Find samtlige løsninger, der passerer igennem punktet $(1,0)$, til differentialligningen

$$x\,y' = -y + \sin x$$

for $x > 0$.

Resultatet af denne prøve slås op på HCØ senest den 11. februar 1991