Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1990

MATEMATIK A

BEMÆRK: Eksaminander med bestået midtvejseksamen i Matematik A fra januar 1990, der ønsker at gå op i forårspensum, regner opgave 10 - 18 og afleverer senest kl. 16.05. Eksaminander, der går op i hele årets pensum, tilkendegiver dette ved aflevering efter kl. 16.05 .

Efterårspensum er omfattet af opgave 1 - 9 :

1. Opskriv en ligning for planen gennem punkterne $(2,-3,1)$, $(3,2,2)$ og $(4,7,1)$

2. Find de værdier af k for hvilke nedenstående ligningssystem er konsistent. Løs det for disse værdier af k .

$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 2 \\ x + 4z &= 0 \\ 3x + 16y - kz &= 0 \end{aligned}$$

3. For hvilke værdier af a er nedenstående matrix invertibel? Find den inverse, når den eksisterer; de anvendte rækkeoperationer skal angives :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

4. Tegn en skitse af det begrænsede område som graferne for $y = x/2 - 1$ og $y = x^{1/2} - 1$ afgrænser i planen. Roter området omkring linien $y = -1$ og udregn rumfanget af det omdrejningslegeme der derved dannes.

5. Udregn den eksakte værdi af $\displaystyle\int_0^{2/3} \frac{dx}{4+9x^2}$.

6. Omskriv ligningen $r\sin^2\theta = \cos\theta,\ \theta \in [\pi/4,\pi/2]$, i polære koordinater til rektangulære koordinater. Skitser og identificer kurven.

7. Givet vektorfunktionen $\underline{r}(t) := \langle \text{Arctan } t, 3\rangle$, $t \in \mathcal{R}$, der beskriver en partikels bevægelse i planen. Skitser banekurven og opskriv et udtryk for farten i denne bevægelse. Til hvilket tidspunkt er farten størst?

8. Find mindste- og størsteværdi for funktionen $2x^2 + 2y^2 - 5y$ på cirkelskiven $\{(x,y)\in\mathcal{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

9. Opskriv det andet Taylorpolynomium $p_2(x)$ for funktionen $\exp(2x)$ ud fra udviklingspunktet $a=0$. Opskriv også et udtryk for restleddet R_2 og giv en vurdering af afvigelsen $|R_2|$ i intervallet $[-1,0]$.

(Opgavesættet fortsætter med forårspensum - vend!)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1990
Matematik A

LÆS først BEMÆRK på forsiden!

Forårspensum er omfattet af opgave 10 - 18 :

10. Find ved mindste kvadraters metode "løsningen" $\bar{x}$ til

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 , \end{aligned}$$

og angiv dermed den linearkombination af vektorerne $\langle 1,1,1,3 \rangle$ og $\langle 2,-1,1,2 \rangle$, der ligger nærmest ved $\langle 4,0,4,8 \rangle$.

11. Find egenværdierne for matricen

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Find egenrummet hørende til den negative egenværdi.

12. Tegn en skitse af det område i rummet der er begrænset af graferne for $z = x^2$, $z = 2 - x^2$, samt planerne $y = 0$ og $y = 4$. Udregn dets rumfang.

13. Find overfladearealet af den del af paraboloiden $z = x^2 + y^2$,der ligger inde i cylinderen $x^2 + y^2 = 1$.

14. Udregn arbejdet udført af feltet $\underline{F} := z\underline{i} - x\underline{j} + y\underline{k}$ når en partikel flyttes fra $(0,0,0)$ til $(1,1,1)$ langs kurven $\langle t, t^2, t^3 \rangle$, $t \in [0,1]$.

15. Benyt Green's sætning til at omskrive $\oint_C xydy$, hvor C er kurven $r = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0,2\pi]$ (positivt orienteret) . Omskriv derefter dette planintegral ved hjælp af polære koordinater, og regn det ud.

16. Tegn en skitse af det område T i rummet der afgrænses af fladen bestemt ved $y = 1 - x^2$, og planerne $y = 0$, $z = 0$ og $z = 1$.
Udregn $\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\, dS$, hvor $\underline{F} = (x^3 + e^z)\, \underline{i} + (1-3x^2)y\, \underline{j} + (\sin(xy))\, \underline{k}$, og S er overfladen af T med udadrettet normal $\underline{n}$.

17. Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 17y = 0 ,$$

for hvilken $y(0) = 8$ og $y'(0) = -2$.

18. Find samtlige løsninger $y(x)$ til differentialligningen

$$y' = xy^2 + x$$

Resultatet af denne prøve slås op på HCØ senest den 28. juni 1990