Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1989/90

MATEMATIK A

1. Afgør om punkterne (2,-3,1), (3,2,2) og (4,7,3) ligger på en ret linie i rummet. Hvis de gør det, opskriv da en parameterfremstilling for denne linie. Hvis de ikke gør det, så opskriv en parameterfremstilling for den plan de udspænder.

2. Find de værdier af k for hvilke ligningssystemet er konsistent. Løs det for disse værdier af k.

$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 2 \\ x + 4z &= 0 \\ 3x + 16y - 8z &= k \end{aligned}$$

3. For hvilke værdier af a er denne matrix invertibel? Find den inverse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

4. Begrund ved differentiation at $\text{Arcsin}\, 2x + \text{Arccos}\, 2x$ er konstant.

5. En kurve i planen er i polære koordinater givet ved ligningen

$$r = 4\cos\theta, \quad \theta \in [0,\pi/2] .$$

Omskriv denne ligning til rektangulære koordinater. Skitser og identificer kurven.

6. Find $\lim_{x\to 0}(\sinh x)^2/x^2$.

7. Lad $\underline{r}(t) := \langle \sin 2t, \cos 2t \rangle$, $t \in [0,1]$, definere banekurven for en partikels bevægelse i planen. Vis at farten i denne banekurve er konstant lig 2.

8. Find mindsteværdien af funktionen $x^2 + y^2 - 2x$ på cirkelskiven

$$\{(x,y)\in\mathcal{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\} .$$

9. Opskriv det første Taylorpolynomium p_1 for funktionen $\ln x$ ud fra udviklingspunktet $a=1$. Gør rede for at for $R := |\ln 3/2 - p_1(3/2)|$ gælder at $R \le 1/8$.

Københavns Universitet,
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1989/90
Matematik A

10. Find de værdier af $s \in \mathcal{R}$ for hvilke $\langle s,s-4,1\rangle$ og $\langle 2,6,-1\rangle$ er lineært afhængige vektorer i $\mathcal{R}^3$. Beskriv for disse s det rum de udspænder.

11. Vis at matricen

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar og find den med A similære diagonalmatrix.

12. Skitser nedennævnte mængde i $\mathcal{R}^3$. Opstil et *dobbelt*integral der giver dens rumfang. *Dobbelt*integralet skal ikke regnes ud.

$$\{(x,y,z)\in\mathcal{R}^3 \mid 0 \le z \le x+2y,\ 0 \le y \le x\ ,\ 0 \le x \le 1\}$$

13. En plade er beskrevet ved $0 \le y \le \exp(x)$ og $0 \le x \le 1$, og har en massetæthed $\rho(x,y) := \exp(x)$. Find pladens masse.

14. Opskriv en parametrisering for et gennemløb i positiv omløbsretning af cirklen $C\colon x^2+y^2= 1$ og benyt denne til opstilling af et "almindeligt" integral for $\oint_C (x - y)^2 dx + (2x - 3y)dy$. Regn ikke ud!

15. Omskriv kurveintegralet i opgave 14 til et fladeintegral. Udregn derefter dette fladeintegral ved hjælp af polære koordinater.

16. Beregn $\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\, dS$, når $\underline{F} := 2x\,\underline{i} - y\,\underline{j} - z\,\underline{k}$ og S er overfladen af den kasse der begrænses af koordinatplanerne og planerne $x=1$, $y=1$, $z=1$.

17. Find samtlige reelle løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0\ ,$$

for hvilke $y(0) = 0$.

18. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$y' + (2/x)y = 6x^2 \qquad x > 0$$

for hvilke $y(1) = 6/5$.