Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1980
Matematik A og E

De reelle tal betegnes i det følgende med $\mathbb{R}$ og de komplekse tal med $\mathbb{C}$.

Opgave nr. 1

(1) Find det fjerde Taylorpolynomium $P_4(x)$ for e^{-x^2} i udviklingspunktet 0 (nul).

(2) Vis at

$$\left| e^{-x^2} - P_4(x) \right| \leq |x|^6 \text{ for } |x| \leq 1.$$

Opgave nr. 2

Lad der være givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet.

(1) Find vinklen mellem planen π givet ved ligningen

$$2x + 2y - z = 1$$

og linien ℓ givet ved parameterfremstillingen

$$x = (1 + 2\sqrt{6})t \ , \ y = (1 + 2\sqrt{6})t \ , \ z = -1 + (4 - \sqrt{6})t$$

(2) Find en ligning for den plan som indeholder linien ℓ og en normalvektor til planen π.

Opgave nr. 3

Lad der være givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen. En partikels bevægelse er i dette system beskrevet

(Opgaven fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1980
Matematik A og E

ved funktionen

$$\bar{f}(t) = (x(t), y(t)) = (t - \sin t\,,\, 1 - \cos t)\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi\ .$$

(1) Find den maksimale fart og de punkter hvori den antages.

(2) Find længden af banekurven.

Opgave nr. 4

(1) Find rødderne til ligningen

$$z^4 = 1$$

Find dernæst alle rødderne til ligningen

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

(Vink: multiplicer ligningen med $(z-1)$) .

(2) Lad $0 < \theta < \pi$. Find modulus og argument af

$$\frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$$

Opgave nr. 5

Find største- og mindsteværdi for

$$f(x,y) = xy(1 - (x+y)^2)$$

i trekanten med hjørner i $(0,0)$, $(2,0)$ og $(0,2)$.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1980
Matematik A og E

Opgave nr. 6

(1) Find en stamfunktion til differentialligningen

$$(2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) - \sqrt{2}\,x)\,dx - x^3\sin(xy)\,dy = 0 .$$

(2) Find den integralkurve der går gennem punktet $(1,\frac{\pi}{4})$.

Opgave nr. 7

(1) Find samtlige reelle løsninger til ligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 100\,y = 0$$

(2) Find en enkelt løsning til den inhomogene ligning

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 100\,y = 100\,x^2 - 24\,x + 1 .$$

OPGAVERNE 8_A, 9_A og 10_A ER BEREGNET FOR MAT A STUDERENDE.
MAT E OPGAVERNE FORTSÆTTER PÅ SIDE 6.

Opgave nr. 8_A

(1) Find de værdier af k for hvilke det homogene lineære ligningssystem

(Opgaven fortsættes)

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= 0 \\ x_1 + (k-1)x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + kx_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

har egentlige løsninger (dvs. løsninger forskellige fra (0,0,0,0)).

(2) Bestem, for hver af disse værdier af k, løsningsmængden for det inhomogene ligningssystem

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= 1 \\ x_1 + (k-1)x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + kx_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Opgave nr. 9_A

Lad S være cylinderfladen

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1 \ , \ -1 \leq z \leq 1\}$$

og lad S være orienteret ved hjælp af den udadrettede normalvektor.

Beregn strømmen af vektorfeltet

$$\bar{g}(x,y,z) = (x^2 + y^2)\,\bar{i} + x^2 y\,\bar{j} + z^4\,\bar{k}$$

gennem S.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1980
Matematik A og E

Opgave nr. 10_A

Lad $V = \{p(x) \mid p(x) = a + bx + cx^2, \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$ være vektorrummet (over $\mathbb{R}$) af 2.gradspolynomier med reelle koefficienter. En lineær afbildning F fra V til V defineres ved

$$F: p(x) \to \frac{d}{dx}[(x+1)p(x)] .$$

(1) Bestem matricen $\bar{\bar{A}}$ for F med hensyn til basen $1, x, x^2$ for V.

(2) Find egenværdierne for $\bar{\bar{A}}$ og for hver af disse en egenvektor.

OPGAVERNE 8_E, 9_E og 10_E ER BEREGNET FOR MAT E STUDERENDE.

Opgave nr. 8_E

Lad der være givet matricer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = (3 \ \ 0 \ \ -2)$$

(1) Angiv hvilke af produkterne AB, AC, BA, CA, BC, CB som er definerede og beregn dem.

(2) Find determinanten af A.

(Opgavesættet fortsættes

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1980
Matematik A og E

Opgave nr. 9_E

Beregn ved skift af integrationsorden - eller på anden måde - integralet

$$\int_1^{\sqrt{3}} \int_x^{\sqrt{3}} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx \, .$$

Opgave nr. 10_E

(1) Afgør om ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

er konsistent.

(2) Find en løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \, . \end{aligned}$$