Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1980

Matematik A og E

De reelle tal betegnes i det følgende med $\mathbb{R}$ og de komplekse tal med $\mathbb{C}$.

Opgave nr. 1

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x}{\cos x - 1} .$$

Opgave nr. 2

Lad - i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem - P være parallelepipedet udspændt af vektorerne

$$\bar{a} = (1,0,0), \; \bar{b} = (1,2,0), \; \bar{c} = (\sqrt{5},\sqrt{5},1)$$

afsat ud fra $(0,0,0)$.

(1) Bestem ligningen for planen π som indeholder hjørnerne med koordinaterne $(0,0,0)$; $(1,2,0)$; $(\sqrt{5},\sqrt{5},1)$

(2) Bestem vinklen mellem planen π og planen givet ved ligningen; $z = 0$.

(3) Bestem parallelepipedets volumen.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1980

Matematik A og E

Opgave nr. 3.

Lad der være givet en kurve i planen ved vektorfunktionen

$$\bar{k}(t) = (\cosh(t) + t\ ,\ \cosh(t) - t) \quad ; \quad -1 \leq t \leq 1.$$

(1) Skitser kurven.

(2) Find de t for hvilke stedvektor og hastighedsvektor, til det til t svarende punkt på kurven, er ortogonale.

(3) Find længden af kurven.

Opgave nr. 4.

(1) Beregn modulus af det komplekse tal

$$\frac{4-6i}{4-3i} - 2+3i$$

(2) Omskriv det komplekse tal

$$(-\sqrt{3} + i)^{-10}$$

til formen $a + ib$ hvor $a,b \in \mathbb{R}$.

Opgave nr. 5.

Find største og mindste værdi for funktionen

$$f(x,y) = xy\, e^{-x^2 - y^2}$$

i cirklen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1980

Matematik A og E

Opgave nr. 6.

Bestem den løsning til

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin(2x) \quad ,$$

for hvilken $y(0) = 1, y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Opgave nr. 7.

Find en integrationsfaktor af formen

$H(x,y) = h(x)$ således at

$$h(x)(2x + 2x^3 + 2xy^2)dx + h(x)(2y)dy$$

bliver et totalt differential.

OPGAVERNE 8_A, 9_A og 10_A ER BEREGNET FOR MAT A STUDERENDE.

MAT E OPGAVERNE FORTSÆTTER PÅ SIDE 6.

Opgave nr. 8_A

Lad vektorfeltet $\bar{g}$ være givet ved

$$\bar{g}(x,y,z) = \frac{y}{1+x^2y^2}\,\bar{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + ze^{yz}\right)\bar{j} + ye^{yz}\bar{k}$$

(1) Angiv samtlige stamfunktioner til $\bar{g}$.

(2) Beregn $\int_k \bar{g} \cdot d\bar{r}$, hvor k er en kurve fra $(0,0,0)$ til $(1,1,2)$.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1980

Matematik A og E

Opgave nr. 9_A

Lad S være halvkuglefladen givet ved

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; , \; z \geq 0\}$$

og lad S være orienteret ved hjælp af normalvektoren som peger bort fra 0.

Beregn strømmen af vektorfeltet

$$\bar{g}(x,y,z) = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$$

gennem S.

Opgave 10_A

Find egenværdierne og for hver af disse en egenvektor for den reelle 3×3 matrix

$$\begin{Bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{Bmatrix}$$

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1980

Matematik A og E

OPGAVERNE 8_E, 9_E og 10_E ER BEREGNET FOR MAT E STUDERENDE.

Opgave nr. 8_E

Lad F være den lineære afbildning af $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$, som er givet ved

$$F(x,y,z) = (x + y + z, x - z, 4x + y).$$

(1) Bestem den til $F \circ F$ svarende matrice.

(2) Har F en invers afbildning?

Opgave nr. 9_E

Lad $f(x,y) = x^2 e^{-xy}$ og lad

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le x\}.$$

Beregn $\int_\Omega f(x,y)\,dxdy$.

Opgave nr. 10_E

Lad $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \ge 1 \text{ og } y \ge |x|\}$.

Find ved overgang til polære koordinater

$$\int_\Omega \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^6}\,dxdy .$$