Naturvidenskabelig embedseksamen. Sommeren 1963.

M A T E M A T I K 6.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Besvarelsen betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

Opgave nr. 1.

Lad der være givet et Hilbertrum H og en afbildning $f:\mathbb{N} \to H$, så at $\| f(n) \| = 1$ og $(f(n) \mid f(m)) = 0$ for n og $m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Lad, for $n \in \mathbb{N}$, $V_n \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(H,H)$ være operatoren: $g \to V_n g = \sum_{\nu=1}^{n} (g \mid f(\nu)) f(n + \nu)$.

Undersøg for den ligelige, den stærke, og den svage topologi på $\mathcal{L}$ og for hver af følgerne (V_n), $n \in \mathbb{N}$, og (V_n^*), $n \in \mathbb{N}$, om følgen har en grænseværdi i den pågældende topologi.

Opgave nr. 2.

Et komplekst tal λ kaldes en næsten-egenværdi for operatoren A på Hilbertrummet H, hvis $\inf\{ \| (A - \lambda E)f \| \mid f \in D(A), \| f \| = 1 \} = 0$.

Vis, at for $A \in \mathcal{L}(H,H)$ er mængden af næsten-egenværdier for A en kompakt delmængde af $\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqq \| A \| \}$.

Vis, at for en (begrænset eller ubegrænset) selv-adjungeret operator A falder mængden af næsten-egenværdier for A sammen med spektret for A.

(fortsættes)

(fortsat)

Opgave nr. 3.

En vektor f i et Hilbertrum H siges at være separerende for en mængde M af operatorer på H, hvis f tilhører definitionsområdet for hver af operatorerne i M, og hvis $A \in M$, $B \in M$, $A \neq B$ medfører $Af \neq Bf$.

Lad ρ være et positivt mål på $\mathbb{R}$, $H = L^2_\rho(\mathbb{R},\mathbb{C})$, Λ_ρ den tilsvarende multiplikationsoperator, $M = \{ a_0E + a_1\Lambda_\rho + \ldots + a_n\Lambda_\rho^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R} \}$ = mængden af polynomier med reelle koefficienter af Λ_ρ, og I et kompakt interval $\subset \mathbb{R}$.

For hvilke positive mål ρ på $\mathbb{R}$ gælder det, at χ_I (den karakteristiske funktion for I) er separerende for M?

Opgave nr. 4.

Hvad siger I. Bendixson's sætning om integralkurverne til det autonome differentialligningssystem

$$\dot{x} = y^2 + x^2y, \quad \dot{y} = x^2 + xy^2$$

i omegnen af det singulære punkt (0,0). Vis, at den rette linie med ligningen $y = x$ er den eneste banekurve for løsninger gennem (0,0). Undersøg, om ligningen har andre singulære punkter og gør i bekræftende fald rede for singularitetens art.

Opgave nr. 5.

Angiv for den partielle differentialligning

$$p^2 - 3pq + 2q^2 + z = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

den løsning, som svarer til begyndelsesværdierne

$$x = u, \quad y = 0, \quad z = 2u^2, \quad p = 4u, \quad q = 3u.$$

(fortsættes)

(fortsat)

Opgave nr. 6.

Om afbildningerne $f,g:]-\infty,\infty[$ ind i $\grave{R}$ samt om den ved

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$$

definerende afbildning $F:]-\infty,\infty[$ ind i $\grave{R}$ antages, at

1) f og g er kontinuerte.

2) $\forall x \neq 0 \ (F(-x) = -F(x) \wedge g(-x) = -g(x) \wedge xg(x) > 0)$.

3) Der findes reelle tal α_1, α_2, således at $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, og således at F er negativ på $]0,\alpha_1[$ og strengt voksende på $[\alpha_1,\alpha_2]$.

Vi antager nu, at differentialligningen

(1) $$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

har en løsning $\varphi:[t_1,t_2]$ ind i $\grave{R}$, som tilfredsstiller betingelserne

1) φ er positiv på $]t_1,t_2[$ og $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$.

2) $\exists t \in]t_1,t_2[\ (\varphi(t) = \alpha_2, \ D\varphi(t) = 0)$.

3) $D\varphi(t_1) > -D\varphi(t_2)$.

Vis, at (1) har netop én periodisk løsning, som ikke er identisk 0, og hvis maksimumsværdi er $< \alpha_2$.

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1963.

Rettelse til skriftlige opgaver
i matematik 6.

I opgave nr. 5 ændres de opgivne udgangsbetingelser til følgende:

$x_o = u$, $y_o = 1$, $z_o = 2u^2 + 3u + 1$, $p_o = 4u + 3$, $q_o = 3u + 2$.