Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen. Vinteren 1963-64.

M A T E M A T I K 6.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Besvarelsen betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

1.

Angiv samtlige singularitetspunkter klassificerede som knudepunkter, spiralpunkter, sadelpunkter etc. for det autonome differentialligningssystem

$$\dot{x} = x + x^2 - y^2, \quad \dot{y} = y - xy.$$

2.

Lad $f,g:]0,\infty[$ ind i $\mathbb{R}$ være differentiable afbildninger, som opfylder betingelsen

$$\forall r \in]0,\infty[\ (f(r) \neq 0 \vee g(r) \neq 0).$$

Vis, at banekurverne til periodiske løsninger til differentialligningssystemet

$$\dot{x} = xf(x^2 + y^2) - yg(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = xg(x^2 + y^2) + yf(x^2 + y^2)$$

er de cirkler med centrum i (0,0), hvis radiers kvadrater er nulpunkter for f. Vis, at enhver ikke periodisk løsning vil konvergere mod (0,0) eller gå asymptotisk mod en periodisk løsning eller fjerne sig i det uendelige.

(fortsættes)

3.

Bestem for den partielle differentialligning

$$(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$$

en løsning, som for $y = 0$ har randværdierne $x + 2$. En diskussion af gyldighedsområdet for løsningsmetoden forlanges ikke gennemført.

4.

Lad H være et Hilbertrum, a et element i H, og (x_n) en følge af elementer i H, der konvergerer mod a i den svage topologi på H.

Vis, at hvis der findes et element $y \in H$, for hvilket talfølgen $(\|x_n - y\|)$ er konvergent, så er $(\|x_n - z\|)$ konvergent for ethvert $z \in H$.

Vis, at hvis H ikke er endelig dimensionalt, findes der for ethvert $a \in H$ og ethvert reelt, ikke-negativt tal α en følge (x_n), der konvergerer mod a i den svage topologi, og for hvilken $\|x_n - a\| \to \alpha$.

5.

På $H = L_m^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, hvor m betegner Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$, betragtes operatoren A_o, hvis definitionsområde er mængden $\mathfrak{D}^1$ af komplekse differentiable funktioner på $\mathbb{R}$, der hver er nul uden for et begrænset interval og har kontinuert differentialkvotient, givet ved $A_o f = iDf$ for $f \in \mathfrak{D}^1$. A_o har en afslutning $\overline{A_o} = A$.

Find A_o^2, og vis, at $\overline{A_o^2} \subsetneq A^2$.

(fortsættes)

Lad H være et Hilbertrum og A en selvadjungeret operator på H med spektret $\sigma(A)$.

Vis, at A er en projektionsoperator, hvis og kun hvis $\sigma(A) \subsetneqq \{0,1\}$.

Vis, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der eksisterer en projektionsoperator P på H og en kontinuert reel funktion f på $\sigma(P)$, så at $A = f(P)$, er, at $\sigma(A)$ indeholder højst to punkter.

Vis, at hvis A er positiv og begrænset med $\|A\| = 1$, og A ikke er en projektionsoperator, findes der to forskellige positive, begrænsede operatorer B og C med $\|B\| = \|C\| = 1$, så at $2A = B + C$.