AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1.del. Den skriftlige prøve.

Sommer 1973

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5

(4 timer)

1.

En kasse indeholder n sedler, der er nummereret fortløbende 1,2, ... ,n. en stikprøve på $k > 1$ sedler udtages uden tilbagelægning, og man noterer det største tal S og det mindste tal M, man har observeret,på de sedler, der er udtrukket, samt differencen $D = S - M$.

Vis, at

$$P\{S = s, M = m\} = \frac{\binom{s - m - 1}{k - 2}}{\binom{n}{k}}, \quad 1 \leqq m < s \leqq n.$$

og

$$P\{D = d\} = (n - d) \frac{\binom{d - 1}{k - 2}}{\binom{n}{k}}, \quad 1 \leqq d \leqq n-1.$$

2.

Lad T og U være indbyrdes uafhængige eksponentielt fordelte stokastiske variable med middelværdi λ^{-1} og μ^{-1} henholdsvis.

A. Vis, at $X = \min(T,U)$ og $Y = I\{T < U\}$ er indbyrdes uafhængige og find fordelingen af X og fordelingen af Y.

Vi skal nu anvende disse resultater på følgende situation: Vi betragter en population på N individer, for eksempel mængden af ugifte mænd. En mand kan forlade denne population af to grunde, enten ved at dø eller ved at blive gift. Lad nu T betegne den tid det tager, inden han dør, og U den tid det tager inden han bliver gift.

Hvis vi observerer et individ gennem tiden,kan vi observere,når han forlader populationen og hvilken grund. Det vil sige,vi kan observere $X = \min(U,T)$ og $Y = I\{T < U\}$, men vi kender ikke værdien af U og T selv.

Antag nu, at T og U er stokastiske variable, der er uafhængige eksponentielt fordelte som angivet ovenfor, og at vi har observeret n individer gennem tiden,og derved fået de indbyrdes uafhængige observationer $(X_1,Y_1), \ldots , (X_n,Y_n)$.

B. Opstil likelihoodfunktion for parametrene (λ,μ) på grundlag af de observerede værdier af $(X_1,Y_1, \ldots , X_n,Y_n)$ og find maksimaliseringsestimatoren $\hat{\lambda}$ for λ og $\hat{\mu}$ for μ.

C. Vis, at $\hat{\lambda}$ konvergerer i sandsynligheden med λ.

D. Vis, at $\hat{\lambda}$ er asymptotisk normalt fordelt med parametre $(\lambda,n^{-1}\lambda(\lambda + \mu))$

3.

En celle kan i løbet af 1 uge blive til X celler, hvor vi antager, at X er geometrisk fordelt, det vil sige

(1) $$P\{X = n\} = (1 - q)^{n-1} q, \; n = 1,2, \ldots$$

hvor $0 < q < 1$.

A. Find den karakteristiske funktion for X og benyt dette til at finde EX samt VX.

Antag nu, at hver af cellerne i løbet af næste uge vil formere sig på samme måde således, at hvis X = n, vil antallet af celler efter 2 uger være

(2) $$Z = X_1 + \ldots + X_n,$$

hvor $X_1, \ldots, X_n$, er indbyrdes uafhængige stokastiske variable med samme fordeling givet ved (1).

Man skriver også definitionen (2) på formen

$$Z = \sum_{k=1}^{X} X_k .$$

B. Find den karakteristiske funktion for Z og benyt dette til at finde

$$P\{Z = n\},\ n = 1,2, \ldots$$

samt EZ.

Efter m ugers forløb er antallet af celler vokset til Z_m.

C. Vis, at den karakteristiske funktion for Z_m er givet ved

(3) $$Ee^{itZ_m} = \frac{q^m e^{it}}{1 - (1-q^m)e^{it}}$$

og benyt dette til at finde EZ_m samt grænsefordelingen af

$$Y_m = \frac{Z_m}{EZ_m}$$

for $m \to \infty$.

Antag nu,at q er en ukendt parameter, og at vi har observeret Z_m efter en uges forløb.

D. Benyt (3) til at finde $P\{Z_m = n\}$, $n = 1,2,\ldots$ og udnyt dette til af finde maksimaliseringsestimatoren for q,og vis at denne er konsistent for $m \to \infty$.