AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve

Sommer 1972

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5

(4 timer)

1.

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$, $n = 2,3,\ldots$, være indbyrdes uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable, således at

$$P\{X_1 = 1\} = 1 - P\{X_1 = 0\} = p,$$

hvor $0 \leq p \leq 1$.

Definer de nye stokastiske variable $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n}$ ved

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_i = \begin{cases} X_i & \text{hvis } Y_{i-1} = 0 \\ 0 & \text{hvis } Y_{i-1} = 1 \end{cases},$$

$i = 2,3,\ldots,2n$.

a. Find værdierne af $(Y_1,\ldots,Y_{12})$, når $(X_1,\ldots,X_{12})$ antager værdierne $(0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,0,1)$.

b. Vis, at

$$P\{Y_i = 1\} = -\sum_{k=1}^{i} (-p)^k, \quad i = 1,2,\ldots,2n.$$

c. Vis, at

$$P\{Y_1 = \varepsilon_1, Y_2 = \varepsilon_2, \ldots, Y_{2n} = \varepsilon_{2n}\}$$

$$= \begin{cases} p^k(1-p)^{2n-2k} & \text{for } \varepsilon_{2n} = 0 \\ p^k(1-p)^{2n-2k+1} & \text{for } \varepsilon_{2n} = 1, \end{cases}$$

$$\varepsilon_i = 0,1, \; i = 1,2,\ldots,2n, \; \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \leq 1, \; i = 1,2,\ldots,2n-1, \; \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = k,$$

$$k = 0,1,\ldots,n.$$

Sæt $T = \sum_{i=1}^{2n} Y_i$ og $Z = Y_{2n}$, og betragt det statistiske problem, der opstår, når

når $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n}$ observeres og p er ukendt.

d. Vis, at (T,Z) er sufficient for p, og find maksimaliseringsestimatoren for p.

e. Vis, at

$$P\{T = k, Z = j\} = \binom{2n-k}{k-j} p^k (1-p)^{2n-2k+j},$$

$$j = 0,1, \; k = j, j+1, \ldots, n.$$

2.

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = 1,2,\ldots$, være indbyrdes uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable, der følger en eksponentialfordeling med tæthed

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0, \end{cases}$$

hvor $\beta > 0$.

a. Find maksimaliseringsestimatoren for $e^{-\frac{1}{2\beta}}$, og vis, at den for $n \to \infty$ er asymptotisk normalfordelt med parametre

$$\left(e^{-\frac{1}{2\beta}}, \frac{1}{n}\frac{1}{4\beta^2}e^{-\frac{1}{\beta}}\right).$$

Sæt $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i > \frac{1}{2}\}$.

b. Vis, at R_n for $n \to \infty$ er asymptotisk normalfordelt med parametre

$$\left(e^{-\frac{1}{2\beta}}, \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{2\beta}}(1-e^{-\frac{1}{2\beta}})\right).$$

c. Sammenlign for $n \to \infty$ maksimaliseringsestimatoren for $e^{-\frac{1}{2\beta}}$ og R_n som estimator for $e^{-\frac{1}{2\beta}}$.

3.

Lad $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$, $i = 1,2,\ldots, n$, $n \geq 2$, være indbyrdes uafhængige, identisk fordelte todimensionale stokastiske variable, således at $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$ er normalfordelt med middelværdivektor $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ og kovariansmatrix $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \gamma \\ \gamma & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, hvor $\sigma_1^2\,\sigma_2^2 > \gamma$.

a. Vis, at den betingede fordeling af X_i for givet Y_i, $i = 1,\ldots,n$, er en normalfordeling med middelværdi $\alpha + \beta Y_i$ og varians σ^2, hvor α, β og σ^2 ikke afhænger af Y_i, og at $\beta = 0$, hvis og kun hvis $\gamma = 0$.

Betragt det statistiske problem, der opstår ved at betragte $(X_1,\ldots,X_n)$ i den betingede fordeling givet $(Y_1,\ldots,Y_n)$, og hvor $\xi_1, \xi_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ og γ er ukendte.

b. Vis, at kvotienttestørrelsen for hypotesen $H:\beta = 0$ er en funktion af V, hvor

$$V = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2},$$

og at V under hypotesen H er Betafordelt for givet $(Y_1,\ldots,Y_n)$.

c. Gør rede for, at V og $(Y_1,\ldots,Y_n)$ er uafhængige når $\beta = 0$, og find da tætheden for $V^{\frac{1}{2}}$'s fordeling.