AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET.

1. del. Den skriftlige prøve

Vinter 1971/72

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5

(4 timer).

1.

A og B spiller terninger efter følgende regler:

Begge spillere har hver en terning, som de må kaste højst to gange. Kaster en spiller kun sin terning én gang, tæller antallet af øjne i dette kast. Kaster en spiller sin terning to gange, tæller kun antallet af øjne i sidste kast. Den spiller, der opnår det højeste antal øjne, har vundet. Hvis de to spillere har opnået samme antal øjne, er spillet uafgjort.

A benytter følgende strategi: Hvis han i første kast slår 4, 5 eller 6 øjne, kaster han kun én gang. Ellers kaster han to gange.

B benytter følgende strategi: Hvis han i første kast slår 6 øjne, kaster han kun én gang. Ellers kaster han to gange.

Lad X være antal øjne A opnår, og Y være antal øjne B opnår.

1. Vis, at

$$P\{X = i\} = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ for } i = 4, 5, 6. \\ \frac{1}{12} \text{ for } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

2. Find EX og EY, og vis at EX > EY.

3. Vis, at A vinder med større sandsynlighed end B.

2.

Levetiden for en rotte kan beskrives ved en stokastisk variabel X, der følger en eksponentialfordeling med tæthed

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{for } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor $\lambda > 0$. Parametren λ kaldes dødsintensiteten.

Rotten følges kun i tidsrummet fra tid 0 til tid T. Man vil da kun observere $Y = \min(X, T)$. (Dødstidspunktet observeres kun, hvis rotten dør før tid T).

1. Vis, at Y's fordelingsfunktion er

$$(1) \qquad G(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ 1-e^{-\lambda y} & \text{for } 0 \leqq y < T \\ 1 & \text{for } T \leqq y \end{cases}$$

2. Find middelværdien af Y.

For $\lambda = 0$ vil funktionen bestemt ved (1) være fordelingsfunktion for den i T udartede fordeling. Vi vil derfor udvide parameterområdet for λ til også at omfatte 0. (D.v.s. vi tillader dødsintensitet 0 svarende til, at rotten aldrig dør).

Lad μ være målet $\nu + \varepsilon_T$ på R, hvor ν er Lebesguemålet og ε_T etpunktsmålet i T. D.v.s.

$$\mu(B) = \begin{cases} \nu(B) & \text{hvis } T \notin B \\ \nu(B) + 1 & \text{hvis } T \in B, \end{cases}$$

for enhver Borelmængde B.

Sæt

$$(2) \qquad g(y) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda y} & \text{for } 0 \leq y < T \\ e^{-\lambda T} & \text{for } y = T \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

3. Vis, at

$$G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)\, d\mu(t)$$

for $y \in R$.

(Vi siger, at G har tæthed g m.h.t. målet μ).

Vi betragter nu følgende eksperiment:

k grupper af rotter, hvor der i den i'te gruppe, $i = 1,2,\ldots,k$, er n_i rotter, udsættes for forskellige behandlinger, og vi observerer $y_{i,j}$, $i = 1,2,\ldots,k$, $j = 1,2,\ldots,n_i$, hvor $y_{i,j}$ er dødstidspunktet for den j'te rotte i den i'te gruppe, hvis denne rotte dør, inden tid T og ellers T.

Man vil da beskrive observationerne ved uafhængige stokastiske variable $Y_{i,j}$, $i = 1,2,\ldots,k$, $j = 1,2,\ldots,n_i$, der alle følger en fordeling, hvis type er givet ved (1), og hvor dødsintensiteterne for rotterne i den i'te gruppe, $i = 1,2,\ldots,k$, antages at være ens. Dødsintensiteten for den i'te gruppe, $i = 1,2,\ldots,k$, betegnes λ_i.

Da fordelingen givet ved (1) har tæthed m.h.t. μ, kan vi definere likelihoodfunktionen L ved

$$L(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} g_{\lambda_i}(Y_{i,j}),$$

hvor g_{λ_i}, $i = 1,2,\ldots,k$, er funktionen givet ved (2) når $\lambda = \lambda_i$.

Begreberne maksimaliseringsestimator og kvotienttest fra forelæsningsnoterne kan da umiddelbart overføres til dette tilfælde.

4. Find maksimaliseringsestimatoren for λ_i, $i = 1,2,\ldots,k$, og vis at den er konsistent for $n_i \longrightarrow \infty$.

5. Opstil kvotienttestet for hypotesen

$$H: \lambda_1 = \ldots = \lambda_k,$$

og find $-2 \ln Q$.

3.

Lad $f: [0,1] \longrightarrow R$ være en positiv, ikke konstant og kontinuert funktion, og lad b være et reelt tal større end eller lig med $\sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$.

Lad $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \ldots$ være en følge af indbyrdes uafhængige stokastiske variable, således at X_i, $i = 1,2,3,\ldots$, er ligefordelt over $[0,1]$ og Y_i, $i = 1,2,3,\ldots$, er ligefordelt over $[0,b]$.

(Ligefordelingen (eller den rektangulære fordeling) over $[0,\beta]$, hvor $\beta > 0$, har tæthed

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \text{ for } 0 < x < \beta \\ 0 \text{ ellers).} \end{cases}$$

1. Udtryk middelværdien og variansen af den stokastiske variabel $f(X_1)$ ved hjælp af funktionen f.

Sæt $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, $n = 1,2,3,\ldots$.

2. Vis, at S_n er asymptotisk normalfordelt med parametre $(\int_0^1 f(x)dx, \frac{\delta^2}{n})$, hvor $\delta^2 > 0$, for $n \longrightarrow \infty$.

Lad $A = \{(x,y) \in R^2 | 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$, og sæt $T_n = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{(X_i, Y_i)}(A)$, $n = 1,2,3,\ldots$.

3. Vis, at T_n er asymptotisk normalfordelt med parametre $(\int_0^1 f(x)\,dx, \frac{\gamma_b^2}{n})$ for $n \longrightarrow \infty$. (Her er γ_b^2 et positivt tal, der afhænger af b).

4. Vis, at $\gamma_b^2 \geq \delta^2$, og at γ_b^2 antager sit minimum for $b = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$.