AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET.

1. del. Den skriftlige prøve

Sommeren 1971

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5

(4 timer).

1.

I en tennisturnering deltager n spillere ($n \geqq 2$). Turneringen afvikles i flere runder. I hver runde deltager et lige antal spillere, som bestemt nedenfor. Hvis dette antal er $2p$ ($p = 1, 2, \ldots$) dannes ved lodtrækning p par; (altså en lodtrækning for hver runde, hvad der ikke er sædvanligt ved sådanne turneringer). De to spillere i et par spiller imod hinanden, og vinderen kvalificerer sig til næste runde, mens taberen ikke deltager mere.

Lad m være det positive, hele tal, der er bestemt ved, at $2^m \leqq n < 2^{m+1}$ og lad $k = n-2^m$; (da er $0 \leqq 2k < n$). Hvis $k \geqq 1$ afvikles en indledende runde blandt 2k af deltagerne udtaget ved lodtrækning. De k vindere herfra samt de n-2k spillere, der ikke var med i den indledende runde, i alt 2^m spillere, deltager i turneringens første runde. Herfra går 2^{m-1} videre til anden runde, 2^{m-2} til tredje o.s.v. indtil 2 spillere mødes i m'te runde, finalen. Vinderen af finalen er turneringens vinder.

Det antages, at i hver kamp har begge spillere sandsynlighed $\frac{1}{2}$ for at vinde, samt at resultaterne af de enkelte kampe og lodtrækninger er stokastisk uafhængige.

Spillerne nummereres $1, 2, \ldots, n$.

a) Find sandsynligheden for, at spiller 1 vinder turneringen samt i tilfældet $k \geqq 1$ sandsynligheden for, at han vinder, givet han deltager i den indledende runde.

b) Find sandsynligheden for, at spiller 1 bliver slået ud af turneringen i μ'te runde ($\mu = 1,\ldots,m$).

c) Vis, at hvis 2p spillere deltager i en runde er sandsynligheden for, at to bestemte af disse ikke mødes i den pågældende runde $\frac{2p-2}{2p-1}$.

d) Find sandsynligheden for, at spiller 1 vinder turneringen ved at besejre spiller 2 i finalen, samt i tilfældet $k \geqq 1$ sandsynligheden for, at dette sker givet henholdsvis
i) hverken spiller 1 eller spiller 2 i D,
ii) spiller 1 i D, spiller 2 ikke i D,
iii) spiller 1 ikke i D, spiller 2 i D,
iv) spiller 1 og spiller 2 i D,
hvor D står for "indledende runde".

2.

Lad $X_1,\ldots,X_n, Y_1,\ldots,Y_n$ være indbyrdes uafhængige stokastiske variable, således at X_k er eksponentialfordelt med skalaparameter $\frac{1}{\lambda}$ og Y_k er eksponentialfordelt med skalaparameter $\frac{1}{\mu}$ ($k = 1,\ldots,n$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$). For eksempel har altså X_1 tætheden

$$\lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty[}(x).$$

Sæt $U_k = I_{\{X_k \leqq Y_k\}}$ ($k = 1,\ldots,n$).

a) Vis, at $P\{X_1 \leqq Y_1\} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

b) Bestem den simultane fordeling af $U_1,\ldots,U_n$ og vis, at den kun afhænger af $\theta = \frac{\lambda}{\mu}$.

c) Find maksimaliseringsestimatoren for θ svarende til, at man har observeret $U_1,\ldots,U_n$ og bestem dens asymptotiske fordeling.

3.

Lad $X_1, X_2, \ldots$ være en følge af ikke-negative, ikke-udartede, indbyrdes uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable med endelige momenter af anden orden. Sæt $\xi = EX_1$, $\sigma^2 = VX_1$ og definer

$$S_0 = 0;\ S_n = X_1 + \ldots + X_n (n = 1, 2, \ldots);\ S_\infty = X_1 + X_2 + \ldots$$

samt for $t \geqq 0$

$$N_t = \begin{cases} \sup\{n \in \{0, 1, \ldots\} : S_n \leqq t\} & \text{hvis } S_\infty > t \\ \infty & \text{hvis } S_\infty \leqq t, \end{cases}$$

(altså er $\{N_t \leqq n\} = \{S_{n+1} > t\}$, $\quad n = 0, 1, \ldots$).

Vis, at for $t \to \infty$ konvergerer

$$U_t = \frac{N_t - t\xi^{-1}}{\sqrt{\sigma^2 \xi^{-3} t}}$$

i fordeling med u-fordelingen som grænsefordeling. (Udtryk for $x \in R$ $P\{U_t \leqq x\}$ ved hjælp af fordelingen af et passende S_n).

(De kan uden bevis benytte følgende resultat: hvis $F_1, F_2, \ldots$ er en følge af fordelingsfunktioner, og F er en kontinuert fordelingsfunktion, således at

$F_n \xrightarrow{W} F \quad (n \to \infty)$, gælder at

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x_n) = F(x)$$

for enhver følge $x_1, x_2, \ldots$ af reelle tal med $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$).