AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve

Vinteren 1970/71

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik II

Matematik 5

(6 timer).

1.

Ved det af undervisningsministeren foranstaltede valg til universitetets styrende organer - konsistorium og fakultetsråd - opstillede som bekendt kun 2 grupper studenter, nemlig Konservative Studenter, liste T, og Moderate Studenter, liste M. (I sociologi opstillede en anden gruppe, men dette får ikke betydning for nedenstående analyse.)

Valget foregik i 20 områder, men valget til fakultetsrådene bortfaldt dog i alle områder på nær 5, da der i de øvrige områder i det højeste var opstillet det antal kandidater, der var brug for.

Endvidere opstillede Konservative Studenter ikke ved fakultetsrådsvalgene, men kun ved valg til konsistorium.

Ved valget kunne hver stemmeberettiget afgive en stemme ved valg til konsistorium og en ved valg til fakultetsråd.

Fra valget foreligger følgende talmateriale:

Område	Konsistorium		Fakultetsråd
	stemmer	%	stemmer
1	104	25.0	-
2	776	25.8	692
3	265	21.0	-
4	22	3.9	-
5	604	15.0	-
6	163	17.9	151
7	79	11.2	62
8	56	7.6	-
9	87	9.6	-
10	19	5.6	-
11	80	7.0	-
12	142	13.0	131
13	58	13.0	-
14	123	9.8	-
15	33	10.5	-
16	67	16.5	61
17	96	5.3	-
18	173	10.4	-
19	180	10.3	-
20	71	11.7	-

(I område 1 havde liste M således færre kandidater, end der var brug for i fakultetsrådet, så at valget falder bort. I område 2 har 692 studenter stemt om hvilke af M's kandidater, der skulle vælges).

Man kunne tænke sig at beskrive ovenstående ved følgende model, idet vi kun betragter de områder, hvor der har været valg både til konsistorium og til fakultetsråd. Alle studenter stemmer uafhængigt af hinanden. Kun studenter, der har stemt ved konsistorialvalget, stemmer ved valg til fakultetsrådet. I det i'te område er sandsynligheden for, at en student stemmer ved konsistorialvalget π_i, og sandsynligheden for at en student stemmer ved fakultetsrådsvalget, givet at han har stemt ved konsistorialvalget, β_i.

Lad for det i'te område N_i være antallet af stemmeberettigede, lad T_i være antallet af studenter, der stemte ved konsistorialvalget, og S_i antallet af studenter, der stemte ved valget til fakultetsrådet. Lad endelig $I = \{2,6,7,12,16\}$ d.v.s. de områder, hvor der har været valg til fakultetsråd.

Antag, at $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$ og $\beta = (\beta_i)_{i \in I}$ er ukendte, mens $(N_i)_{i \in I}$ er kendt.

A. Vis at likelihoodfunktionen bliver

$$L(\pi,\beta) = \prod_i (\pi_i \beta_i)^{S_i} (\pi_i(1 - \beta_i))^{T_i - S_i} (1 - \pi_i)^{N_i - T_i}$$

B. Find maximaliseringsestimatorerne for π og β.

C. Opstil kvotienttestet for hypotesen, at alle β_i'erne er ens, og vis at teststørrelsen ikke afhænger af $(N_i)_{i \in I}$.

D. Find den betingede fordeling givet $(T_i)_{i \in I}$ og vis, at den ikke afhænger af π.

E. Find maximaliseringsestimatoren for β i den betingede fordeling og opstil i denne fordeling kvotienttestet for hypotesen om, at alle β_i'erne er ens.

F. Anvend E til at undersøge om hypotesen om, at alle β_i'erne er ens, kan tænkes at være opfyldt for det foreliggende talmateriale.

Hvis du har tid besvar da følgende :

Ovenstående model er næppe realistisk, thi da liste T ikke stillede op ved fakultetsrådsvalget, må man regne med, at de studenter, der stemte henholdsvis T og M ved konsistorialvalget, har haft forskellige sandsynligheder for at stemme ved fakultetsrådsvalget.

Man kunne forbedre modellen på følgende måde:

I stedet for at antage at alle studenter i et område, der havde stemt ved konsistorialvalget, stemte ved fakultetsvalget med samme sandsynlighed, kunne man antage, at alle, der havde stemt på liste M, stemte igen, og at de studenter, der havde stemt på liste T, kun med sandsynligheden θ_i stemte ved fakultetsrådsvalget.

G. Opstil i denne model kvotienttestet for hypotesen: alle θ_i'erne er ens. Kan den bruges til at analysere det givne talmateriale?

Tilføjelse til tabellen over n log n

n	n log n
692	4525.4218
776	5163.6558
1097	7679.4165
1227	8726.8823

2.

En fabrik fremstiller glas til brilleglas.

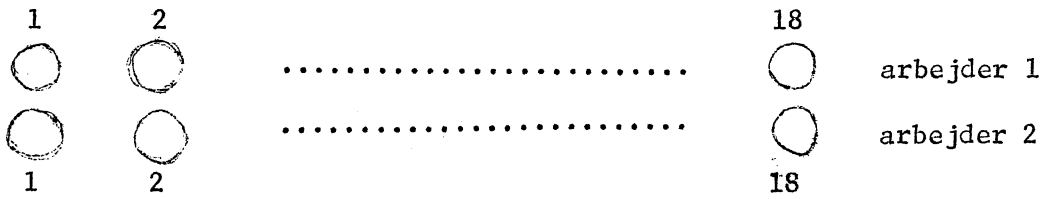
Fremstillingen foregår på den måde, at glasmassen ophedes i beholdere i en ovn, hvorefter den flydende glasmasse hældes i cylindriske forme. Fra hver beholder fremstilles 18 cylindre. Glassets kvalitet afhænger blandt andet af , hvor mange blærer det indeholder.

For at undersøge om den tid, der går, fra glasmassen kommer ud af ovnen og til den hældes i formen, påvirker kvaliteten, har man udført følgende forsøg:

På 3 forskellige dage er 2 beholdere med glasmasse blevet opvarmet samtidig i samme ovn. De to beholdere er blevet taget ud samtidig af hver sin arbejder og glasmassen fyldt i formene.

Formene er nummererede fra 1 til 18 og fyldes i rækkefølge, således at først fyldes form nr. 1, derefter form nr. 2 o.s.v.. Man kan regne med, at den tid, der går mellem påfyldningen af to på hinanden følgende forme, er konstant, og at form nr. i er blevet fyldt samtidig af de to arbejdere.

Cylindre set oppefra.



Man har derefter for hver af de to beholdere observeret antallet af blærer henholdsvis i cylinder nr. 3, nr. 10 og nr. 16.

I skemaet nedenfor er anført logaritmen til antallet af blærer i cylindrene. Disse observationer kan antages at være normalfordelte.

Logaritmen til antal blærer i glascylindre fremstillet på forskellige dage

Cylinder nr. / dag	3	10	16
A	1.74 1.69	1.95 1.79	1.97 1.99
B	1.54 1.53	1.76 1.79	1.75 1.86
C	1.89 1.67	1.89 1.92	2.05 2.07

Er der sammenhæng mellem glassets kvalitet og den tid, der går fra glasmassen kommer ud af ovnen, og til den hældes i formen.

Beskriv i bekræftende fald denne sammenhæng.