AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET.

1. del. Den skriftlige prøve

Vinteren 1970/71

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5
(4 timer).

1.

Lad $N, X_1, X_2, \ldots$ være indbyrdes uafhængige stokastiske variable defineret på et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, således at N er poissonfordelt med parameter $\lambda > 0$, mens $X_1, X_2, \ldots$ er identisk fordelte med fordeling Q (altså $Q(B) = P\{X_1 \in B\}$, $B \in \mathcal{B}$). Lad for $n = 1, 2, \ldots$ og for $B \in \mathcal{B}$ $S_n(B)$ betegne antallet af variable blandt $X_1, \ldots, X_n$, der antager en værdi i B:

$$S_n(B) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{X_k \in B\}},$$

og definer endvidere

$$S_N(B) = \sum_{k=1}^{N} I_{\{X_k \in B\}};$$

(værdien af $S_N(B)$ i punktet $\omega \in \Omega$ er altså $\sum_{k=1}^{N(\omega)} I_{\{X_k \in B\}}(\omega)$).

a) Find fordelingen af $S_n(B)$, find $ES_n(B)$ og bestem for $B, C \in \mathcal{B}$ kovariansen mellem $S_n(B)$ og $S_n(C)$.

b) Antag, at $B_1, \ldots, B_m$ $(m \geqq 2)$ er parvis disjunkte borelmængder. Find den simultane fordeling af $S_n(B_1), \ldots, S_n(B_m)$.

c) Vis, at den simultane fordeling af N og $S_N(B)$ er bestemt ved at

$$P\{N = n,\ S_N(B) = x\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{x} (Q(B))^x (1 - Q(B))^{n-x},$$

$$\text{for } n = 0, 1, \ldots,\ x = 0, 1, \ldots, n$$

og benyt dette til at finde fordelingen af $S_N(B)$.

d) Vis, at for $B, C \in \mathcal{B}$ er $S_N(B)$ og $S_N(C)$ ukorrelerede hvis og kun hvis $Q(B \cap C) = 0$, og at $S_N(B)$ og $S_N(C)$ er stokastisk uafhængige hvis $B \cap C = \emptyset$.

e) Hvis tiden tillader det, vis da, at $S_N(B)$ og $S_N(C)$ er stokastisk uafhængige hvis og kun hvis $Q(B \cap C) = 0$.

2.

Hvis $a \in R$ betegner i det følgende $[a]$ det største hele tal $\leqq a$.

Lad X være en stokastisk variabel med tæthed

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqq 0. \end{cases}$$

a) Vis, at for $n = 1, 2, \ldots$ er fordelingsfunktionen for $Y_n = nX - [nX]$

$$F_n(y) = \begin{cases} 0 \text{ for } y < 0 \\ \dfrac{1-\exp(-\frac{y}{n})}{1-\exp(-\frac{1}{n})} \text{ for } 0 \leqq y < 1 \\ 1 \text{ for } y \geqq 1. \end{cases}$$

(Beregn for $y \in [0, 1]$ $P\{Y_n \leqq y\}$ ved at spalte op efter værdien af $[nX]$).

b) Vis, at for $n \longrightarrow \infty$ konvergerer Y_n i fordeling og bestem grænsefordelingen.