AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIGE EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve.
Vinteren 1969/70.

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I
Matematik 5.
(4 timer).

1.

En kasse indeholder m røde og n sorte kugler ($m \geqq 1, n \geqq 1$). Én kugle trækkes ad gangen tilfældigt uden tilbagelægning, indtil alle kuglerne er udtrukket.

Lad $V_{m,n}$ angive ventetiden til enten alle de røde eller alle de sorte kugler er udtrukket: $V_{m,n} = v$ hvis og kun hvis man i v'te trækning får enten den sidste røde kugle, og der stadig er mindst en sort kugle tilbage i kassen, eller får den sidste sorte kugle, og der stadig er mindst en rød tilbage.

a) Vis, at for $m \leqq n$ er $V_{m,n}$'s fordeling bestemt ved

$$P\{V_{m,n} = v\} = \begin{cases} \dfrac{m}{(m+n)^{(m)}} (v-1)^{(m-1)} & \text{for } m \leqq v \leqq n-1 \\[2ex] \dfrac{m}{(m+n)^{(m)}} (v-1)^{(m-1)} & \\ + \dfrac{n}{(m+n)^{(n)}} (v-1)^{(n-1)} & \text{for } n \leqq v \leqq m+n-1 \\[2ex] 0 \text{ ellers.} & \end{cases}$$

Til hjælp i det følgende kan De uden bevis benytte summationsformlen

$$\sum_{k=a}^{b} k^{(x)} = \frac{1}{x+1} \left((b+1)^{(x+1)} - a^{(x+1)}\right),$$

der gælder for alle ikke-negative hele tal x og alle hele tal a, b med $a \leqq b$.

b) Bestem middelværdien af $V_{m,n}$.

c) Betragt tilfældet $m = 1$. Vis, at for $n \longrightarrow +\infty$ konvergerer $\frac{1}{n} V_{1,n}$ i fordeling og bestem grænsefordelingen.

d) Betragt tilfældet $m = n$. Vis, at for $n \longrightarrow +\infty$ konvergerer $2n-1-V_{n,n}$ i fordeling og bestem grænsefordelingen.

2.

Lad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad der på Ω være defineret to følger af stokastiske variable

$$R_1, R_2, \ldots \qquad \text{og}$$

$$V_1, V_2, \ldots$$

således, at alle de stokastiske variable er indbyrdes stokastisk uafhængige, mens $R_1, R_2, \ldots$ er identisk fordelte og $V_1, V_2, \ldots$ er identisk fordelte.

Endvidere antages det, at

$$ER_1^2 < +\infty,$$

$$R_n > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \text{ og}$$

$$0 \leqq V_n < 2\pi \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Sæt $ER_1 = r > 0$, $VR_1 = \sigma^2$.

Definer de stokastiske variable $X_1, X_2, \ldots$ og $Y_1, Y_2, \ldots$ ved

$$X_1 = R_1 \cos V_1, \quad Y_1 = R_1 \sin V_1,$$

$$X_n = X_{n-1} + R_n \cos V_n, \quad Y_n = Y_{n-1} + R_n \sin V_n \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Sæt endelig

$$D_n = (X_n^2 + Y_n^2)^{1/2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

a) Indtegn i et sædvanligt koordinatsystem i planen et eksempel på beliggenheden af (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) og (X_3, Y_3) ved at tillægge (R_1, R_2, R_3) og (V_1, V_2, V_3) bestemte værdier.

b) Vis, at for $n \longrightarrow \infty$ konvergerer $\frac{D_n}{n}$ i sandsynlighed mod en konstant c.

c) Vis, at $0 \leqq c \leqq r$, at $c = r$ hvis og kun hvis V_1's fordeling er udartet, samt at $c = 0$ hvis og kun hvis $EX_1 = EY_1 = 0$.

I det følgende antages, at R_1 og V_1 ikke begge følger en udartet fordeling, og at V_1's fordeling er bestemt ved

$$P\{V_1 = a\} = 1 - P\{V_1 = a + \pi\} = p,$$

hvor $0 \leqq a < \pi$, $0 \leqq p \leqq 1$. Sæt $q = 1-p$.

d) Vis, at D_n's fordeling ikke afhænger af a.

e) Vis, at for $n \longrightarrow +\infty$ konvergerer

$$D_n^* = \frac{D_n - nr|p-q|}{[n(\sigma^2 + r^2(1-(p-q)^2))]^{1/2}}$$

i fordeling, og vis, at grænsefordelingen for $p \neq \frac{1}{2}$ er u-fordelingen og for $p = \frac{1}{2}$ er fordelingen af $|U|$, hvor U er u-fordelt.