AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIGE EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve.
Sommeren 1969.

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I
Matematik 5.
(4 timer)

1.

Lad antallet af blomster på et æbletræ være en stokastisk variabel **N** med fordeling bestemt ved

$$P\{N = n\} = (1-p)\, p^n, \quad n = 0, 1, \ldots, 0 < p < 1.$$

Antag yderligere, at en blomst har sandsynlighed $\frac{1}{2}$ for at blive til en moden frugt, og at dette foregår uafhængigt af hvad der sker med de andre blomster. Lad R være antallet af modne frugter på træet.

a. Find fordelingen af R givet N = n.

b. Vis, at sandsynligheden for, at træet havde n blomster, når vi har observeret r modne frugter, er

$$\binom{n}{r} p^{n-r} (2-p)^{r+1}\, 2^{-n-1}.$$

c. Vis, at hvis en æbleplantage med k træer ikke producerer nogle modne frugter, da er sandsynligheden for, at der var n blomster til at begynde med givet ved

$$\binom{n+k-1}{k-1} p^n (2-p)^k\, 2^{-n-k}.$$

2.

Lad $X_1, \ldots, X_n$ være indbyrdes uafhængige stokastiske variable med samme fordeling, givet ved

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{x^{\lambda-1} e^{-x}}{\Gamma(\lambda)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Her er λ en parameter, om hvilket det gælder, at

$$\lambda \geqq \lambda_0 > 0.$$

a. Skitser likelihoodfunktionen og find maksimaliseringsestimatoren for λ.

b. Find kvotienttestørrelsen Q for hypotesen

$$H_0: \lambda = \lambda_0.$$

c. Vis, hvorledes man kan finde det kritiske område svarende til signifikansniveauet α.

Istedet for kvotienttestet kunne man benytte teststørrelsen Q_1 defineret ved

$$Q_1 = \frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda)\Big|_{\lambda = \lambda_0},$$

hvor L er likelihoodfunktionen. Testet går da ud på at forkaste H_0, når Q_1 er for stor.

d. Vis, hvorledes man kan finde det kritiske område svarende til signifikansniveauet α, og vis, at det bliver det samme som for kvotienttestet.

3.

Vi skal i det følgende benytte eksponentialfordelingen givet ved tætheden

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqq 0, \end{cases}$$

hvor λ er en positiv parameter.

Lad nu $X_1, \ldots, X_n$ være indbyrdes uafhængige eksponentielt fordelte stokastiske variable med parametre $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Lad $Y_1, \ldots, Y_n$ være indbyrdes uafhængige eksponentielt fordelte stokastiske variable med parametre $(\delta\lambda_1, \ldots, \delta\lambda_n)$. Yderligere forudsættes, at $(X_1, \ldots, X_n)$ er uafhængig af $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

For $\alpha > 0$ og $n = 1, 2, \ldots$ defineres den stokastiske variabel Z_n ved

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha Y_i}{\alpha Y_i + X_i}.$$

a. Vis, at fordelingen af Z_n ikke afhænger af parametrene $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, at Z_n har en middelværdi og en varians, og at

$$E\, Z_n = E \frac{\alpha U}{\alpha U + \delta V},$$

hvor U og V er indbyrdes uafhængige stokastiske variable med samme eksponentialfordeling med parameter $\lambda = 1$.

b. Benyt resultaterne under a. til at vise, at Z_n konvergerer i sandsynlighed mod sin middelværdi.

c. På grundlag af observationerne $(X_1,\ldots,X_n, Y_1,\ldots,Y_n)$ skal De finde ligninger til bestemmelse af maksimaliseringsestimatorene for parametrene $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ og δ.

d. Vis, at maksimaliseringsestimatoren $\hat{\delta}$ er konsistent for δ.