

AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve.

Sommeren 1963.

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5.

(4 timer)

1.

- a) Antag, at antallet af artikler X skrevet pr. forfatter er en stokastisk variabel, som følger fordelingen givet ved

$$P\{X = 0\} = p_0, \quad 0 < p_0 < 1,$$

$$P\{X = x\} = (1-p_0) \frac{p^x}{x(-\ln q)}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad 0 < p = 1-q < 1.$$

Vis, at fordelingen af X givet $\{X \geq 1\}$ er en logaritmisk fordeling med parameter p .

- b) Artiklerne bliver sendt til et tidsskrift, hvor redaktøren slår plat og krone for at afgøre, om hver enkelt artikel skal publiceres i tidsskriftet. Lad nu α , $0 < \alpha = 1-\beta < 1$, være sandsynligheden for, at redaktøren publicerer en artikel.

De skal finde fordelingen af antallet Y af publicerede artikler pr. forfatter og vise, at fordelingen af Y er af samme slags som fordelingen af X , det vil sige, at fordelingen af Y givet $\{Y \geq 1\}$ er en logaritmisk fordeling med parameter

$$\frac{p\alpha}{1-\beta p}.$$

Man kan med fordel benytte identiteten

$$\sum_{n=x}^{\infty} a^{n-x} n^{(x)} = x! (1-a)^{-x-1}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad 0 < a < 1.$$

2.

Lad X_n , $n = 1, 2, \dots$ være en følge af stokastiske variable hvis fordeling er givet ved

$$P\{X_n = x\} = \int_0^1 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} w(p) dp,$$

hvor w er en sandsynlighedstæthed på intervallet $[0, 1]$.

a) Find middelværdi og varians af $\frac{X_n}{n}$.

b) Find, for eksempel ved at undersøge

$$P\left\{\frac{X_n}{n} \leq z\right\}, \quad 0 < z < 1,$$

grænsefordelingen af $\frac{X_n}{n}$.

3.

En vægt på et posthus er indrettet således, at resultatet af en vejning af en genstand med vægt ξ kan beskrives ved en stokastisk variabel X , som er normalt fordelt med parametre (ξ, σ^2) .

En mand får nu vejet 3 pakker af forskellig vægt på følgende måde. Først vejes alle pakkerne enkeltvis, derefter i par og endelig alle 3 på en gang. Ialt udføres således 7 vejninger, og vi får de variable

$$\{X_{ijv}, i = 0, 1, j = 0, 1, v = 0, 1, (i, j, v) \neq (0, 0, 0)\},$$

den

hvor et indeks er 1 hvis/pågældende pakke er med i vejningen og 0 ellers.

De skal nu opstille en statistisk model med det formål at estimere vægten af pakkerne og måleusikkerheden σ^2 , samt angive fordelingen af de fundne estimatorer.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS
INSTITUT FOR
MATEMATISK STATISTIK .

Søren Johansen
Matematik 5.

Tabel over $-lnq$ og $-qlnq$.

q	$-lnq$	$-qlnq$
.53	.6349	.3365
.52	.6539	.3400
.51	.6733	.3434
.50	.6931	.3466
.49	.7133	.3495
.48	.7340	.3523
.47	.7550	.3549
.46	.7765	.3572
.45	.7985	.3593
.44	.8210	.3612
.43	.8440	.3629
.42	.8675	.3644
.41	.8916	.3656
.40	.9163	.3665
.39	.9416	.3672
.38	.9676	.3677
.37	.9943	.3679