AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve.

Vinteren 1967/68

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5.
(4 timer)

1.

Lad (Ω, A, P) være et sandsynlighedsfelt, hvorpå der er defineret stokastiske variable $X_1, \ldots, X_n$, $n = 3, 4, \ldots$, som er indbyrdes uafhængige og identisk fordelte. Lad den til X_1 hørende fordelingsfunktion F være givet ved den kontinuerte tæthed f.

1) Vis, at

$$P\{\alpha < X_1 < \ldots < X_n < \beta\} = \frac{[F(\beta) - F(\alpha)]^n}{n!} .$$

2) Vi siger, at et talsæt $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$, har et lokalt maksimum i punktet k, hvis x_k er større end sine naboer, det vil sige:

Der er et lokalt maksimum i 1, hvis $x_1 > x_2$.

Der er et lokalt maksimum i n, hvis $x_n > x_{n-1}$.

Der er et lokalt maksimum i $k (1 < k < n)$, hvis $x_k > x_{k-1}$ og $x_k > x_{k+1}$.

Lad nu Y være den stokastiske variabel defineret ved, at $Y(\omega)$ er antallet af lokale maksima for talsættet $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

Vis, at

$$P(Y = 1) = \frac{2^{n-1}}{n!} .$$

3) Vis, at

$$P(Y = 2) = \frac{2^{n-3}}{n!} (2^n - 2n).$$

2.

Lad $X_0, X_1, \ldots, X_n$ være indbyrdes uafhængige normalt fordelte stokastiske variable, som har middelværdi 0 og varians 1.

Vi definerer de nye stokastiske variable $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ ved

$$Y_0 = X_0$$

og

$$Y_k = \frac{X_k \sqrt{k}}{\sqrt{X_0^2 + \ldots + X_{k-1}^2}}, \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

1) Vis at

$$\sum_{\nu=0}^{k} X_\nu^2 = Y_0^2 \prod_{\nu=1}^{k} \left(1 + \frac{Y_\nu^2}{\nu}\right), \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

2) Find den simultane fordeling af $Y_1, \ldots, Y_n$ og vis, at de stokastiske variable er uafhængige.

3.

Lad $X_1, \ldots, X_n$ være uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, for hvilke

$$p = P\{X_1 = 1\} = 1 - P\{X_1 = 0\}, \qquad p \in]0,1[.$$

Vis, at den stokastiske variable Y_n defineret ved

$$Y_n = \sqrt{S_n(1-p)} - \sqrt{(n - S_n)p},$$

hvor

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

er asymptotisk normalt fordelt.