AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve

Sommeren 1966

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5

(4 timer)

1.

Observationerne $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 3$, er indbyrdes uafhængige, normalt fordelte stokastiske variable med samme varians σ^2, og $t_1, t_2, \ldots, t_n$ er reelle tal, hvoraf mindst tre er indbyrdes forskellige. Positionsparameteren i X'ernes simultane fordeling betegnes ξ.

Betragt følgende hypoteser:

Hypotesen H_1 om kvadratisk regression på t'erne. ξ ligger under H_1 i et underrum L_1 bestemt ved

$$x \in L_1 \iff \exists\ \alpha_0 \in R,\ \alpha_1 \in R,\ \alpha_2 \in R:$$

$$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \alpha_2 t_i^2 \qquad \forall i.$$

Her betegner x_i den i'te koordinat af $x \in R^n$.

Hypotesen H_2 om lineær regression på t'erne. ξ ligger under H_2 i et underrum L_2 bestemt ved

$$x \in L_2 \iff \exists\ \beta_0 \in R,\ \beta_1 \in R:$$

$$x_i = \beta_0 + \beta_1 t_i \qquad \forall i.$$

Hypotesen H_3 om fuldstændig homogenitet. ξ ligger under H_3 i et underrum L_3 bestemt ved

$$x \in L_3 \iff \exists\ \gamma \in R:\ x_i = \gamma\ \forall\ i.$$

Opstil de nødvendige estimatorer og teststørrelser til successiv testning af hypoteserne H_1, H_2 og H_3, både når σ^2 er kendt, og når σ^2 er ukendt med variationsområde $]0, +\infty[$.

For at lette oversigten anbefales det at indføre forkortede betegnelser, bl.a. at indføre andet og tredie centrale moment μ_2 og μ_3 i t'ernes empiriske fordeling og at erstatte t'erne med deres afvigelse fra den empiriske middelværdi (gennemsnittet).

Lad ρ betegne mængden bestående af et nul og et ettal:

$$\rho = \{01\}$$

og sæt

$$\Omega = \rho x\ \rho x\ \dots\ .$$

Ω er da mængden af alle følger af nuller og ettaller. Et $\omega \in \Omega$ vil vi skrive på formen

$$\omega = \omega_1\omega_2\ \dots\ ,$$

hvor ω_i er ω's i'te koordinat for $i = 1,2,\dots$.

Betragt mængdesystemet $\mathcal{A}_0$ bestående af den tomme mængde og mængder af formen

$$\{\omega \mid \omega_1 = i_1,\ \omega_2 = i_2, \dots, \omega_k = i_k\}\ ,$$

hvor $i_j \in \rho$ for $j = 1,\dots,k$, $k = 1,2,\dots$.

Vis, at systemet $\mathcal{A}$ af foreninger af endeligt mange mængder fra $\mathcal{A}_0$ er et legeme.

Lad $\mathcal{J}_n$ for $n = 1,2,\dots$ være mængden af permutationer af de første n hele positive tal, d.v.s. systemet af bijektive afbildninger af mængden $\{12\dots n\}$ på sig selv og sæt

$$g_J(\omega) = \omega_{J(1)}\omega_{J(2)}\cdots\omega_{J(n)}\omega_{n+1}\omega_{n+2}\ \dots \qquad \forall J \in \mathcal{J}_n\ \forall\omega \in \Omega\ \forall n\ .$$

g_J overfører altså en given følge af nuller og ettaller i en følge, der fremkommer ved at udføre permutationen J på den givne følges første n elementer.

Endelig indføres

$$H_n^\omega A = \frac{1}{n!} \sum_{J \in \mathcal{J}_n} I_{g_J(\omega)}(A)\ ,$$

der er defineret for $\forall\omega \in \Omega$ $\forall$positive hele n og $A \in \mathcal{A}$.

Vis, at

$$\lim_{n \to \infty} H_n^\omega A$$

eksisterer for alle $A \in \mathcal{A}_0$, hvis og kun hvis

(1) $$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n(\omega)}{n}$$

eksisterer. Her er $s_n(\omega)$ antallet af ettaller blandt ω's første n koordinater.

Vis, at hvis et $\omega \in \Omega$ opfylder (1) definerer ligningen

$$PA = \lim_{n \to \infty} H_n^\omega A \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

en endelig additiv sandsynlighed P på $\mathcal{A}$.