

AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve

Vinteren 1965/66

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5
(4 timer)

1.

Lad observationerne X_1, \dots, X_n , $n = 1, 2, \dots$, være indbyrdes uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med tæthed proportional med

$$e^{-(x-\theta)^4}, \quad x \in \mathbb{R},$$

hvor θ er en reel parameter.

Vis, at der findes en entydig bestemt maksimaliseringsestimator for θ . Bevis, at den er et konsistent skøn over θ og asymptotisk normalt fordelt.

Vis dernæst, at den empiriske middelværdi og den empiriske median ligeledes er konsistente skøn, der er asymptotisk normalt fordelt, og find deres asymptotiske efficiens.

2.

Lad F, F_1, F_2, \dots være fordelingsfunktioner for sandsynlighedsfordelinger på den reelle talakse \mathbb{R} .

Vis, at F_n konvergerer svagt mod F for $n \rightarrow \infty$, hvis og kun hvis

$$F(x-0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x-0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x+0) \leq F(x+0)$$

for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

Lad x_{np} betegne mindste og y_{np} største p-fraktil for F_n , og lad x_p og y_p være de tilsvarende størrelser for F . Vis, at F_n konvergerer svagt mod F for $n \rightarrow \infty$, hvis og kun hvis

$$x_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{np} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_{np} \leq y_p$$

for ethvert $p \in [0, 1]$.

3.

En urne indeholder m hvide og n sorte kugler. Kuglerne udtages tilfældigt, indtil alle kugler, der er tilbage i urnen, har samme farve.

Hvad er sandsynligheden for først at trække en hvid kugle, dernæst en sort o.s.v. skiftevis?