KØBENHAVNS UNIVERSITET
INSTITUT FOR
MATEMATISK STATISTIK

X

AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve

Sommer 1965

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5
(4 timer)

1.

En urne indeholder m sorte og n røde kugler. Disse udtrækkes en af gangen uden tilbagelægning, indtil man har trukket kugler af begge farver.

Find sandsynligheden for, at dette sker ved k'te trækning.

Benyt dette til at vise, at

$$\sum_{\nu=2}^{n+1} \frac{n^{(\nu-1)}m}{(n+m)^{(\nu)}} = \frac{n}{n+m} .$$

Vis, at det forventede antal gange, der skal trækkes, inden man får kugler af begge farver, er

$$1 + \frac{n}{m+1} + \frac{m}{n+1} .$$

2.

Lad $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$, $n = 1,2,\ldots$, være indbyrdes uafhængige, identisk fordelte, todimensionale stokastiske variable. Fordelingen af (X_1,Y_1) har tætheden 1 over området

$$0 \leqq x \leqq 1$$
$$0 \leqq y \leqq f(x),$$

hvor f er en kontinuert, strengt positiv reel funktion med

$$\int_0^1 f(x)dx = 1.$$

X

For ethvert $k = 1,2,\ldots$ betragtes inddelingen

$$0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \ldots < \frac{k-1}{k} < 1$$

enhedsintervallet. De tilhørende delintervaller er

$$[0,\frac{1}{k}[,[\frac{1}{k},\frac{2}{k}[,\ldots,[\frac{k-1}{k},1] .$$

Til ethvert $x \in [0,1]$ svarer en stokastisk variabel

$$F_{n,k}(x) = \max_{\nu} Y_{\nu},$$

hvor maksimaliseringen foregår over alle ν, for hvilke X_{ν} ligger i samme delinterval som x.

Vis, at

$$F_{n,k}(x) \xrightarrow{P} f(x), \quad n \longrightarrow \infty$$

for ethvert $x \in [0,1]$, hvis der til ethvert n vælges et k således, at

$$\frac{k}{\sqrt{n}} \longrightarrow c$$

for $n \longrightarrow \infty$, hvor c er en strengt positiv konstant.

3.

Lad observationerne $X_1,\ldots,X_n$, $n = 1,2,\ldots$, være indbyrdes uafhængige, Poisson-fordelte stokastiske variable. Den i'te observations fordeling har parameter

$$\beta t_i, \quad i = 1,\ldots,n,$$

hvor $\beta > 0$ er ukendt, og $t_1,\ldots,t_n$ er kendte positive tal.

Find maksimaliseringsestimatoren for β, og angiv dens asymptotiske fordeling for $n \longrightarrow \infty$, når

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \longrightarrow \infty$$

for $n \longrightarrow \infty$.

Opstil dernæst kvotienttestørrelsen Q for hypotesen

$$H_o: \beta = \beta_o,$$

hvor $\beta_o > 0$, og find den asymptotiske fordeling for -2 log Q under samme grænseovergang som ovenfor.

Det bemærkes, at man ifølge en tidligere eksamensopgave kan bevise, at en følge Y_n, $n = 1,2,\ldots$, af stokastiske variable, der er Poisson-fordelte med parametre λ_n, $n = 1,2,\ldots$, er asymptotisk normalt fordelt (λ_n,λ_n) for $n \longrightarrow \infty$, når λ_n konvergerer voksende mod ∞ for $n \longrightarrow \infty$.