X

AKTUAREKSAMEN, EKSAMEN I STATISTIK
OG NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

1. del. Den skriftlige prøve.

Vinteren 1964/65.

Sandsynlighedsregning og statistik I.

Matematik 5.

(4 timer)

1.

En stikprøve på n + 1 elementer udtages tilfældigt med tilbagelægning af en population på n forskellige elementer, n = 1,2,... .

Hvad er sandsynligheden for, at alle n elementer forekommer i stikprøven ?

2.

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n = 1,2,..., være indbyrdes uafhængige stokastiske variable, som er rektangulært fordelt over intervallet (-1,1).

Vis, at

$$Y_n = X_1^{m_1} + X_2^{m_2} + \ldots + X_n^{m_n}$$

er asymptotisk normalt fordelt $(0, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i+1})$ for $n \to \infty$, når $1 \leq m_1 < m_2 < \ldots$ er en følge af hele ulige tal, og $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i}$ er divergent.

3.

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n = 1,2,..., være uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable med tæthed

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & x > 0 , \end{cases}$$

og fordelingsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & x > 0 . \end{cases}$$

$X_{(n)}$ og $X_{(1)}$ betegner som sædvanlig henholdsvis $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$ og $\min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

a) Find fordelingsfunktionen for $X_{(n)}$, og vis, at $P(X_{(n)} < 0) \to 0$, $n \to \infty$.

b) Find fordelingsfunktionen for $X_{(1)}$, og vis, at $P(X_{(1)} > 0) \to 0$, $n \to \infty$.

c) Find den simultane tæthedsfunktion f for $X_{(n)}$ og $X_{(1)}$, og vis, at $f(x,y) = f(-y,-x)$, $(x,y) \in R^2$.

d) Udled et udtryk for tæthedsfunktionen g for $Z = X_{(1)} + X_{(n)}$.

e) Ved at benytte, at

$$\int_0^a u(1-u)^{n-2}du = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{a(1-a)^{n-1}}{n-1} - \frac{(1-a)^n}{n(n-1)}, \quad a > 0$$

skal De vise, at

$$g(z) \to \frac{e^{-z}}{(e^{-z}+1)^2}, \quad z \in R, \quad n \to \infty.$$