KØBENHAVNS UNIVERSITET
INSTITUT FOR
MATEMATISK STATISTIK.

X

Aktuareksamen, eksamen i statistik
og naturvidenskabelig embedseksamen
ved Københavns Universitet

1. del. Den skriftlige prøve.

Sommer 1964

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I

Matematik 5
(4 timer)

1.

En urne indeholder a sorte, b hvide og c røde kugler. Kuglerne udtrækkes en ad gangen med tilbagelægning, indtil alle farver er fremkommet.

Vis, at sandsynligheden for, at den sidst udtrukne kugle er rød, er

$$\frac{ab(a+b+2c)}{(a+c)(b+c)(a+b+c)} .$$

2.

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = 1,2,\ldots$, være indbyrdes uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable, der er rektangulært fordelt over intervallet $[-\theta,\theta]$, $\theta > 0$.

Vis, at

$$T = \max(X_{(n)}, - X_{(1)})$$

er maksimaliseringsestimator for θ.

Udled T's fordeling, og undersøg, om T er sufficient, konsistent for $n \to \infty$ og central.

3.

Vis, at det fjerde centrale moment i en Poisson-fordeling med parameter $\lambda \geqq 0$ er $3\lambda^2 + \lambda$.

Bevis dernæst, at Poisson-fordelingens additivitetsegenskab medfører, at en Poisson-fordelt stokastisk variabel har samme fordeling som summen af et vist endeligt antal indbyrdes uafhængige, Poisson-fordelte stokastiske variable, der alle har varianser mindre end en.

Benyt disse resultater og den centrale grænseværdisætning til at vise - eller vis på anden måde - at en følge X_n, $n = 1,2,\ldots$, af stokastiske variable, der er Poisson-fordelte med parametre λ_n, $n = 1,2,\ldots$, er asymptotisk normalt fordelt (λ_n, λ_n) for $n \to \infty$, når λ_n konvergerer voksende mod $+\infty$ for $n \to \infty$.