B1

X

AKTUAREKSAMEN OG EKSAMEN I STATISTIK

VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

I. del. Den skriftlige prøve.

Sommeren 1962.

Sandsynlighedsregning og teoretisk statistik I.
(4 timer)

1.

Lad

$$\begin{array}{ll} X_{11},\ldots,X_{1n} & \\ X_{21},\ldots,X_{2n} & \qquad k = 1,2,\ldots \\ \vdots \qquad \vdots & \qquad n = 1,2,\ldots, \\ X_{k1},\ldots,X_{kn} & \end{array}$$

være indbyrdes uafhængige stokastiske variable rektangulært fordelt over intervallet (0,1).

Find fordelingen af

$$U = \prod_{i=1}^{k} \max_{1 \leq j \leq n} X_{ij} \quad .$$

2.

En urne indeholder N kugler, X røde og N-X sorte, $X = 0,1,\ldots,N$, $N = 1,2,\ldots$ Der udtages uden tilbagelægning en stikprøve på n kugler, $n = 1,2,\ldots,N$. Antallet af røde kugler i stikprøven betegnes x, $x = 0,1,\ldots,n$.

Hvad er fordelingen af antallet af røde kugler i stikprøven?

Antallet af røde kugler i urnen antages nu at være en stokastisk variabel med sandsynligheden $g_N(X)$ for at antage værdien X.

Hvad er nu fordelingen af antallet af røde kugler i stikprøven?

B,

X

Hvad er sandsynligheden $p_n(x)$ for at trække en rød kugle i den (n+1)'te trækning givet, at de første n trækninger gav x røde kugler?

3.

Hvis $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = 1,2,\ldots$, er indbyrdes uafhængige og identisk normalt fordelte stokastiske variable med middelværdi ξ og varians $\sigma^2>0$, er maximum-likelihood-skønnene over ξ og σ^2 henholdsvis

$$\bar{X} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$$

og

$$s'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \quad .$$

Ved hjælp af spaltningssætningen for χ^2-fordelingen vises det, at $\bar{X}$ og s'^2 er stokastisk uafhængige.

Betragt følgende mere almindelige estimationsproblem:
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ er simultant normalt fordelte stokastiske variable med identiske marginale fordelinger med middelværdi ξ og varians $\sigma^2>0$. Korrelationskoefficienterne antages at være kendt. De variable har altså en simultan tæthedsfunktion

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n\sqrt{|R|}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}(x_i-\xi)(x_j-\xi)} ,$$

hvor

$$R = \langle\rho_{ij}\rangle , \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n,$$

med determinant $|R|$ er korrelationskoefficientmatricen, og

$$T = \langle\tau_{ij}\rangle , \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n,$$

er dens reciprokke matrix.

Find maximum-likelihood-skønnene over ξ og σ^2. Vis, at de er indbyrdes uafhængige, og find deres fordeling.